




I.L. Zollman. inv. I.B. Brühl. sc. Lips.

P. IGN. GAST. PARDIES S. J.

# OPERA MATHEMATICA

*continentia*

ELEMENTA

# GEOMETRIAE

*DISCURSUM*

DE

# MOTU LOCALI

# STATICAM

ET

*Duas Machinas, ad conficienda*

# HOROLOGIA SOLARIA

*habiles,*

In quibus omnibus nobilissima veterum & recentiorum Geometrarum & Mechanicorum inventa Methodo brevi & facili traduntur

IN USUM STUDIOSAE JUVENTUTIS LATINITATE DONATA.

*EDITIO TERTIA.*



*JENÆ*, Sumptibus GEORGII CHRIST. TROEBERT.
MDCCXXI.



# AD LECTOREM.

PRodit L. B. altera pars tractatuum PARDIES, quam diu promiſerat diuque Viri docti exſpectarunt; certè ſi Bibliopolæ Batavo licuit procraſtinationem ejus in raritatem librorum gallicorum, ex inopinato bello funeſtiſſimo ortam, conjicere, & noſtrati idem licebit, eoque magis, quo tam monetæ depravatio momentanea ferè, & neglectus Mathe-

maticorum ſtudiorum, majus obſtaculum eidem ponant. Ita eſt, Gallos amamus, gallica deſideramus, gallica miramur & æſtimamus, & tamen pauci noſtrum, niſi in pejoribus, gallos imitamur. Saltandi artem, linguæ peritiam, exactionum modus & tributorum, & ſi præter inconſtantiam alia quædam, Gallis uſitata, in Germaniam reduces plurimi affe- runt, optimas artes & in easdem ſtudia indefeſſa Gallorum, nemo reportat. Matheſis apud Gallos ſat exquiſitè colitur, ipſique Galli eandem omnium

belli

belli Officialium primariam disciplinam esse volunt, o-pereque ipso probant, maximum rei bellicæ exinde commodum addi. Rex ipse, quem Magnum cognominant, sumtus prægrandes ministrat iis qui in Mathematicis studiis aliquid valent, inde Architecturæ militaris indefessi cultores dantur, ita ut reliquos præcedere conentur; Geographi, Astronomi & Mechanici talia quoque præstitêre, ut nonnulli eorundem de palma cum reliquis gentibus certare videantur. Non nego quidem Germanos quoque

poſſidere quæ Gallis victo-riam dubiam reddere poſ-ſint, ſi non præripere; atta-men incitamenta h. e. u-niverſalis, ſtudii Mathema-tici, amplexus & exiſti-matio deeſt, hinc vileſcunt libri quoque mathemati-ci, & bibliopolæ deterren-tur ſumtibus, quos in-terpretandis exterorum ſcriptis miniſtrarent. Cer-tè mirum eſt dari qui & Juris Studioſo haud neceſſe dicant ut diſciplinas ma-thematicas ſciat, ſatis eſſe, modo ea, quæ in legibus tradita de ejusmodi caſi-bus, noverint; annon, *ve-ram non ſimulatam Philo-*

*ſophi-*

*ſophiam*, cum Imperatore profitentibus, neceſſe eſt, & hanc utilem Philoſophiæ partem intelligere? Novi ego JCtos Mathematicos multis aliis palmam eripientes; & quid de Feldeno dicemus, ut alios taceam? quantum lumen ipſi Matheſeos ſcientia dederit in reſolvendis Juris Quæſtionibus, ſatis demonſtraret opere ipſo, ſi Senectus permitteret. Quantum vero damnum & opprobrium neglectus diſciplinarum Mathematicarum attulerit Conſiliariis in perluſtrandis rationibus, Advocatis in defendendis cauſis hujus

materiæ, Nobilibus ipsis in ritè administrandis officiis aulicis & bellicis, hoc alibi vidi cum stupore. Ne igitur & pauci isti quibus Mathesis arridet defectum librorum aut pretium magnum & peregrinam linguam accusare queant, Bibliopola & hosce sequentes, *de motu locali, luminis, viribus moventibus, Staticâ & horologiographicâ*, priori Autoris libro *de Geometria* adjungere voluit, quorum interpretatio mihi ab Interprete prioris celeberrimô injuncta, non ob peritiam meam, cum vel quotidie a tantis Viris

edo-

edoceri non erubeſcam, ſed quod laudatiſſimus Interpres aliis negotiis gravioribus diſtractus huic labori incumbere non poſſit. Quantum ergo mihi, qui Galliam ipſam perluſtravi parumper, licuit, genuinum ſenſum ſecutus ſum tum artis tum linguæ gallicæ. Hoc fateor, Autorem multa non adeo clarè tradidiſſe quæ in præfatione ſua promiſit, præprimis quæ Architecturam bellicam & Pyrobolicam ſapiunt, interim in multis ſua præſtitit. Tuum erit L. B. operam meam benevole accipere, & ma-

thematica non ante despicere, quam eadem edoctus videas nulli usui esse; Vale & fave tuo

*Frider. VVilh.* Schumacher/ *Phil. Mag. & U. J. Cult.*

# *DISCURSUS*

DE

# MOTU LOCALI,

UM ANIMADVERSIONIBUS
IN MOTUM LUMINIS.



# PRÆFATIO.

*Non hic elogia Mechanica componere, aut commoda scientiæ de motu exponere constitui. Notum satis, omnia producta aut ex industria humana, aut naturalibus causis provenientia, non nisi per motum fieri. Adeo ut impossibile sit secreta Physicæ penetrare, vel feliciter progredi in inventione & praxi artium, absque adminiculo mechanicorum, hoc est absque cognitione præceptorum motus. Nec totam hanc materiam hic tradere conabor; nimis ampla est quam ut adeo brevi discursu comprehendi possit. Ad ea me restrinxi quæ hujus scientiæ elementa dici possunt, & in specie, communicationem motus in per-*

 cussio-

*cussionibus, considerare insisto. Hanc materiam â Maguis viris pertractatam esse verum est; sed plane alia via, quam isti, incedere mihi videor: nam missis hypothesibus particularibus, in ipsis Naturæ fontibus causas omnium istorum effectuum invenire studeo, quos in motu videmus, & exin demonstrationes facere, quæ nullam experientiam præsupponentes, non nisi certissimis puræ Metaphysicæ principiis fundarentur. Propositum hoc sine dubio audax videbitur iis, qui difficultatem illam norunt experientiam sic præveniendi, & Naturæ leges imponendi, quas illa in posterum observet. Forsan & differentia quæ est inter regulas quas formare laboro, & eas quas Dn. Descartes in suis principiis proposuit, ansam dabit curiosis fautoribus Philosophiæ dicti Autoris, inquirendi in quonam consistant paralogismi mei, cum ratiocinia quæ facio admodum opposita sint iis, quas plurimi hactenus pro verissimis demonstrationibus habuerunt. Fateor enim ex septem regulis quas Cartesius de motu dat, non nisi*

*uni.*

*unicam cum meis concordare; ita ut necessario aut Philosophus hic hallucinaverit, aut ego ipse in errores exstantes inciderim. Cæterum, quid per totam Galliam quoad regulas percussionis, quas nonnulli, celeberrimi Regiarum Academiarum Mathematici Parisiis & Londini, proposuere, publicatum sit, haud ignoro. Si gloria est nova quædam in scientiis invenisse, eam his viris dubiam non reddam, quam exin contendere poterunt, quod secretâ legum motus invenerint; lubens eam illis cedo, nihilque mihi tribuo. Attamen dicere possum, me tribus jam abhinc annis publice edidisse quod hic in discursu propono; & si regulæ meæ cum istorum conferantur, fortasse conformitatis inibi satis invenietur, ut credas me cum illis in veritatem incidisse; ast satis etiam differentiæ reperietur, ut judicare possis, me non ab iis hæc didicisse; cum ad hæc non nisi regulas suas simpliciter, absque probatione proposuerint, ego autem omnes quas profero, demonstrare allaborem. Et licet Dn. Huygens spem nobis fecerit, se brevi*

*brevi libellum editurum, in quo omnes ſuas regulas probaturus; nihilominus utut tali viro me nequaquam comparem, dicere tamen audeo methodum ejus à mea planè differre, quoniam ſatis jam ſe explicuit, & nobis aperuit demonſtrationes ſuas ſpecialibus hypotheſibus fulcitas. Quicquid ſit, mentem meam jam explicavi, quam parum ſollicitus ſim de gloria illa, ut habear pro autore harum rerum: totam his Viris linquo; & ſi iis placuerit me ejus participem reddere, ut beneficium accipam favorem reputabo, ſi modo agnoſcere velint, me cogitationes eorum tetigiſſe, aut ad minimum non longe ab iis aberraſſe.*

DISCUR-

# DISCURSUS
## DE
# MOTU LOCALI.

I.



I nobis imaginamur, in toto mundo nihil corporei præter unum aut duos globos esse, & de his globis omnia separamus quæ aliqualem sympathiam aut secretam communicationem causari possint, per quam alter alterum aut attraheret aut propelleret; uno verbo, si globos hos liberos ab omni speciali determinatione consideramus, absque levitate, absque gravitate, in vacuo quodam aut ad minimum in spacio plane uniformi, ubi nihil sit quod eosdem ab uno latere ad aliud trahat, aut eos impedire queat quo minus liberè se moveant; si jam in locum aliquem pro-

*Corpus per se iu differens est, ad quitem aut motum.*

truderentur, tunc conciperemus globos hosce plane indifferentes se habituros, ut se tangant, aut separentur, vel hic aut alibi sint; quoniam in uno loco non plus inveniunt quam in alio; & per consequens eodem modo indifferentes erunt, ut vel in quiete vel in motu sint.

*Corpus quando semel in quiete est, semper inibi manet.*

II. Ita, si præterea concipimus, unum ex his globis in quiete alicubi esse, allatum illuc per causam aliquam, quæ potentiâ gaudet movendi vel retinendi corpus; eodem tempore concipiemus illum inibi perpetuò quieturum, nisi adsit nova causa eundem promovens aut de loco trahens eo quod motum ipsi det: Globus enim hic cum per se sit indifferens & ad quietem & ad motum, & semel ad quietem determinatus, impossibile est, ut se ipsum ad quietem hanc linquendam, & motum recipiendum determinet. Sic perpetuo in quiete hac permaneat oportet, si nihil aliunde veniat eundem illinc auferens.

*Et si semel in motu est semper moveri pergit.*

III. Per eandem rationem concipere debemus, quod si alteruter horum globorum in motu sit, pulsus & promotus a Deo, vel Angelo quodam; qui ipsum movere cœpit; concipere,

cipere, dico, debemus, globum hunc qui sic se movere incepit, semper in motu perrecturum, nisi nova adsit causa eundem retinens; quoniam globus hic cum per se indifferens sit ad motum & ad quietem, & semel ad motum determinatus, impossibile est, ut se ipsum ad reliquendum motum & recipiendam quietem determinet. Ita necesse est semper in motu hoc maneat, si nihil aliunde veniat eum inde aufferens.

*Quies non est pura negatio.*

IV. Probe video per naturam nos eo inclinare ut quietem consideremus tanquam cessationem actionis, & motum ut actionem positivam, quam in nobis ipsis experimur, cum nos movemus aut aliud corpus movere volumus, cum concipiamus corpus manere in quiete, quamdiu nemo illud tangit, aut nulla alia causa adest quæ reipsa qualitatem aut actionem hanc ad motum necessariam ei imprimit. Ita videtur, quod licet corpus semel in quiete existens, in ea perpetuo maneat, non tamen sequatur, quod, si semel in motu sit, perpetuo in eo permaneat; ad se movendum enim actione positiva opus est, & quies nil nisi negatio, aut actionis, vel motus cessatio est.

*Tantum actionis positivæ esse in quiete quem in motu.*

V. Sed si gravitas corporum nostrorum, quæ portare oportet, rigiditas membrorum flectendorum. agitatio spirituum adhibendorum & multa alia aliquam nos experiri faciunt renitentiam, & nos obligant quadam violentiâ uti ad superanda hæc impedimenta; inde nulla fluit consequentia contra nostram hypothesin, quâ supponimus nullum impedimentum nec gravitatis nec peculiaris inclinationis dari, neque corporis quod extrinsecus resistere possit. Hoc casu manifestum est, non plus actionis requiri ad motum quam ad quietem; & ut corpus quiescat, non minus necesse est illud in quiete positum fuisse quam necessum est fuisse in motu, ad id ut moveatur. Et revera si consideramus naturam quietis aut motus, reperiemus motum æque dici posse *cessationem quietis*, ac quies dicitur *cessatio motus*: aut potius videbimus utrumque revera positivum quid esse quoniam motus *est status, per quem corpus locis diversis successive respondet*; aut *præsentia transiens*, aut *series diversarum præsentiarum in locis diversis*: sicut quies *est status*, per quem corpus semper uni eidemque

que loco respondet; aut potius *eadem præsentia in eodem loco.* Ita ut quies æque ac motus sit *Status*, aut potius *Præsentia*; cum hac tamen differentia, quod quies sit Status consistentiæ & præsentia constans, quæ semper eadem conservatur; cum e contrario motus sit status mutabilis, & præsentia transiens. Jam quo etiam modo considerentur præsentiæ hæ constantes aut transeuntes, si quædam actio aut vis adest, aut quoddam genus causarum, in corpore, hunc ordinem diversarum præsentiarum motus producens; non minus actione aut vi opus est in quiete ad conservandam eandem præsentiam: quoniam rem aliquam conservare, est eandem perpetuò producere. Manifestum igitur, quod postquam præsentia per corpus in primo momento producta, (loquor cum iis qui veram harum præsentiarum productionem volunt) eadem de novo rursus producatur oporteat, per idem corpus in sequenti momento, ut in quiete permaneat. Jam mihi videtur, tantundem in hoc actionis & tantundem inesse vis, ac ad producendam præsentiam secundam in hoc secundo momento, loco repro-

ducendæ primæ; & in hoc sensu versum Poëtæ cujusdam antiqui adhibere possumus:

*Non minor est virtus quam quærere parta tueri.*

Ita, sive oporteat quovis momento novam præsentiam, quoad motum producere; sive etiam quovis momento sive instanti eandem præsentiam quoad quietem reproducere: semper eodem recidet, & corpus non minus laboris habebit ad se conservandum in eadem præsentia, & se retinendum in quiete, quam ad producendas novas præsentias & se conservandum in motu. Hinc tandem concludendum, quod sicut corpus eo ipso quod semel ad quietem determinatum sit, sufficienter determinatam quoque ad se conservatum perpetuo in eadem præsentia; ita & statim ac semel determinatum ad motum, sufficienter determinatum quoque ad semper novas præsentias producendas & ita se sine intermissione movendum.

*Objectiones.*

VI. Non multum temporis teram respondendo ad omnes instantias rabulisticas quas facere possumus de hac materia cum faciles admodum sint solutu. Dicunt enim v. g. cau-

causam finitam effectum infinitum producere non posse, & motum hunc fore infinitum, quoniam perpetuo duraret. Dicunt eum qui corpus moveet ipsi quoque certam qualitatem, quæ *impetus* vocatur, imprimere, & quamdiu qualitas hæc duret, durare etiam motum. Sed qualitate hac cessante, motum quoque cessare: addunt, qualitatem hanc non posse perpetuo durare, cum suapte natura tam imperfecta sit, ut durationem longi temporis non exigat. Dicunt adhuc experientiam testari, omnem motum paulatim cessare: quod in rota violenter agitata animadvertitur; in globulo tudiculari, in area sua agitato; in globo suspenso & aliis corporibus quorum motiones paulatim diminuuntur, & tandem plane exstinguuntur.

*Causa finita effectum perpetuum habere potest.*

VII. Dico facillime responderi posse ad has difficultates & multas ejus generis alias. Si motum hunc volumus esse effectum infinitum, quoniam perpetuo durat; etiam quies effectus infinitus dicendus erit, si ita perpetuo durat; & consequenter si causa finita non potest habere effectum infinitum, dicendum erit quod simulac homo corpus aliquod quie-

scere fecerit, corpus hoc non possit perpetuo in quiete hac permanere, sed necesse sit quietem hanc cessare tandem, & corpus se movere incipere; quod rationi non consentaneum est. Magna differentia est inter effectum infinitum, & effectum perpetuo durantem: & si verum est causam finitam non posse infinitum effectum producere; æque verum est, causam quibusvis terminis inclusam, tamen effectum dare posse qui perpetuo subsistat, nisi per novā causam destruatur: si enim Quadratam figuram in cera describo, figura hæc semper durabit, si nihil eam corrumpit aut ipsam ceram destruit. Ita non inconveniens est dicere, quietem aut motum semel in corpore quodam productos, in infinitum durare, nisi ab alio destruantur.

*Qualitas quæ Impetus vocatur, perpetuo durat.*

VIII. uod qualitatem eam attinet quam in corpore productam volunt per id quod movet, idem mihi est sive credas eam sive non; hoc tantum dico, si qualitas hæc necessaria est, durabit perpetuo, semel producta, & nunquam existere desistet, nisi tunc, cum a nova causa destruetur. Et in hoc Vasquii sententia rationi admodum convenit, dum in genere

*Vasquez l. 2. d. 81. c. 2. & 3.*

genere de omnibus formis tam substantialibus quam accidentalibus,& in specie de motu & *Impetu* asserit; quod si per momentum saltim subsistere possint absque influxu primæ causæ efficientis, etiam perpetuo durent, donec per productionem novæ formæ contrariæ destruantur. Si vero in sententia hac persistere volumus & dicere, qualitatem hanc esse naturâ suâ tam debilem, ut sponte destruatur; hoc ipso contendo qualitate hac destructa, nihilominus necessum esse, ut motus duret, per rationes jam dictas: quoniam motus cessare nequit nisi quies de novo producatur. Jam semper causa positivâ opus ad producendum de novo qualemcunque effectum; cum tamen non sit necessaria ut id quod jam est subsistere faciat; & hæc vera ratio est quare figura quadrata ceræ inscripta in æternum duraret, si Deus omnia extrinsecus agentia impediret ne quid in cera corumperent, nam cera figuram hanc perdere nequit, nisi alia figura producatur. Et sicut figura de novo existere nequit, absque causa positiva eam producente, qualem nos non adesse supponimus; necesse est hanc figuram primam jam

pro-

productam, semper in possessione existentiæ suæ subsistere. Eodem modo res se in motu habet; & licet prætensus iste impetus existere cesset, motus tamen jam productus, idcirco cessare non debet, quoniam nulla nova adest causa quietem producens, & motus non potest cessare quiete nondum productâ.

*Corpora mota moveri desinunt, quoniam impediuntur.*

IX. Tandem, quod videmus corpora propulsa brevi tempore moveri desistere, nihil contra nos probat, quoniam certum est corpora hæc impedimenta motus habere. Videmus quoque motum tanto diutius durare in corporibus hisce, quanto plus impedimentorum auferimus aut diminuimus. Sic globus certe diutius currit in pergula bene planata, quam in via scabra. Rota melius volvitur circa axem parvum & bene tornatum quam circa spissum & irregularem; lapis longius per aerem quam per aquam jaculatur. Ast in sequentibus explicare conabor, quomodo impedimenta hæc motum corporum paulatim cessare faciant.

*Postulatum ad certitudinem*

X. Quæ de natura & perpetuitate motus dixi, aliquo modo ad intellectum ejus quod in discursu sequenti demon-

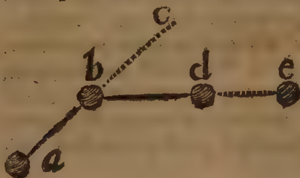
demonstrare conabor necessaria *sequentium demonstrationum.* sunt. Cum autem quæstio nunquam adeo clare tractari queat, quin rixosis disputationibus obnoxia sit: probe video quod sine dubio non omnes, per omnes meas rationes, convicti sint de eo quod probare volui. Cæterum cum nemine simultates suscepturus, nec ansam præbiturus credendi, me discursum meum in principio dubio fundare; declaro, me, ad firmandas demonstrationes meas, non opus habere, ut quis cogitet, motum revera perpetuum esse, modo mihi concedatur, quod nemo hominum negabit, quod sc. motus cum semel inceperit, ad minimum per tempus aliquod duret & tanto magis uniformiter continuetur, quanto minus impedimenti adest quod eundem retinet aut diminuit. Mihi unum idemque est, sive continuationem hanc motus per productionem *qualitatis impressæ*, aut per simplicem determinationem, aut per quicquid velis, explices. Tantummodo peto ut mihi permittatur ponere ut *Postulatum* geometricum, quod nempe corpus semel propulsum, per aliquod tempus se movere continuet, & quod tempus hocce sa-

tis

tis notabile sit, dum extrinsecus nihil adsit quod retinere motum aut diminuere possit. Hôc mediante spero demonstrationes sequentes omnem sua vim accepturas.

*Corpus successive plures determinationes recipiens ultimæ tantum addictum manet.*

XI. Corpus non solum in quiete aut motu permanet, sicut semel incepit in eo esse, sed & in eadem motus specie, & eodem velocitatis gradu manet, in quo positum. Verbi gratia, si incepit se movere in linea recta versus Orientem cum uno gradu velocitatis, pari gradu se movere pergit ita ut nunquam in uno saltim puncto a linea hac recedat. Id quod manifestum est per easdem rationes quas attuli probaturus motum semper durare. Notandum autem quod posteaquam corpus plures diversas determinationes successivè accepit; ultimæ addictum maneat, ita ut præcedentes nihil juris in id retineant. Verbi gratia, si globus manu aut aliter pulsus sit ab *a* in *b*, & deinceps idem globus portetur

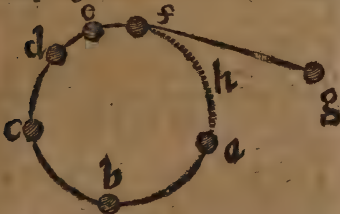



ab

*a b* in *d* cumque inibi linquamus; dico globum continuare motum versus *e* in eadem linea *b d e*, cum ea velocitate quam habuit a *b* in *d*; & hæc prima determinatio quam accepit ab *a* in *b*, & quæ eum in *c* portasset, jam nulli usui est, non magis ac si nunquam fuisset; quoniam per secundam hanc determinationem destructa est.

XII. Hinc sequitur corpus non posse determinari aut induci ut moveatur in lineatur curvâ, aut velocitate inæquali: sed omne corpus liberum in linea recta & uniformi velocitate se movere pergit. Exempli gr.

*Corpus liberum non potest determinari ut se moveat in linea curva, aut velocitate inæquali.*




Si corpus moveatur in linea curvâ ab *a* per *b*, *c d e*, usque in *f*; (uti lapis in funda) & inde corpus hoc in *f* linquatur ut videamus quo tendat: dico non continuaturum motum in curvilinea versus *h*, sed iturum rectâ

ver-

versus *g* linea, quæ curvam in puncto *f* tanget. Nam quod corpus primo ab *a* in *b* motum sit, nihil ultimæ huic determinationi affert, eodem modo etiam jam moveretur, si tantum incepisset moveri a puncto *b* aut a *c* aut a *d* vel *e* adhuc propius, modo semper in *f* eundem velocitatis gradum habuerit: quoniam omnes hi primi motus totidem didiversæ determinationes sunt, quarum ultimæ primas annihilant; ita corpus ultimæ addictum manet determinationi. Ultima igitur determinatio illud versus *g* portabat; hoc est accipere debet inclinationem quam linea curva habet in puncto *f*; quæ inclinatio per tangentem metitur, uti Geometris notum: secundum hanc tangentem ergo corpus ultimo determinatum est, & per consequens secundum hanc lineam se movere pergit.

*Omne corpus quod circa centrum movetur ab eodem discedere conatur.*

XIII. Hinc videmus hoc axioma verissimum esse, *quod omne corpus in gyrum actum, conetur longius de centro motus sui recedere*: sicut facit lapis in funda, qui facit ut sentiamus in manu vim quam adhibet ut recta incedere possit linea, & per consequens a manu quæ centrum motus est, recedere: quod faciunt aquæ guttæ

guttæ vel grana arenæ quæ recta lineâ desiliunt, quamprimùm de rota cultrarii, aut verticillo, ubi admodum velociter volvebantur, se liberare possunt:

XIV. Falli quoque eos videmus, qui materiam cœlestem liquidam & immobilem statuentes, solem & astra primum aliquem impetum potuisse accepisse credunt qui semper duret, & qui eos in circulo circa centrum mundi faciat moveri. Manifestum enim est, quod si Angelus, aut alia quæcunque causa, astrum ita in circulo circa centrum mundi moverit; quamprimum Angelus hic aut hæc alia causa astrum reliquerit, hoc etiam eodem tempore in circulo moveri desineret, & rectâ linea versus extremitates mundi auffugeret. *Astra a se ipsis moveri nequeunt.*

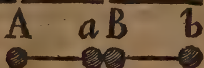
XV. Sed si corpus alligatum sit uti globus filo appensus vel rota imposita axi, aut si liquidum & vasi inclusum uti aqua in pelvi; tunc si globus hic aut rota semel satis fortiter motus, vel liquor hic motus etiam fuerit; omnia hæc corpora pergent moveri in circulo, globus circa clavum cui appendet, rota circa axin cui affixa, & liquor circa centrum vasis cui inclusus. Item si duo corpora *Quomodo corpus moveri possit circulariter.*

pora

pora invicem juncta æqualiter ad diversa loca agitentur; necesse est corpora hæc opposita in circulo moveri circa punctum quod in medio eorum est: & ita fusus aut verticillum pergit moveri in circulo, quoniam partes oppositæ inter se cum sint unitæ & junctæ, & digitis agitatæ duobus diversis modis, una in hac, altera in illa parte, fusum circa se ipsum volvi oportet. Si autem partes hæ oppositæ inæqualiter pulsentur, ita ut una velocius aliquantum ad latus aliquod feratur; tunc corpus hoc, præter circularem motum circa se ipsum, alium motum habebit, qui illud totum in aliquas diversas lineas mittet, secundum diversitatem & combinationem harum determinationum. Et ita verticillum axe suo in tabula diversas figuras concatenatas describit, quamdiu se cum incredibili velocitate circa proprium centrum movet.

*Corpus se movens contra aliud corpus, ipsi totum suum motum dat.*

XVI. Cogitemus jam corpus se movens in lineâ rectâ, offendere aliud; & videamus, quid accidere debeat his duobus corporibus. *Primò*, cum corpora sint impenetrabilia, impossibile est corpus A se movere & corpus B quod ante se offendit, non etiam

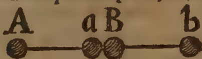



etiam moveri; alias enim corpora hæc se penetrarent. Et cum suppοnam corpus B esse plane indifferens vel ad manendum in quiete vel recipiendum motum quem ei dare poterimus, simul ac corpus A se contra illud movebit, illud etiam ad æqualem motum determinabit; cum ergo nullum impedimentum adsit, corpus B tantundem motus, quantum corpus A habebat, capiet, & ad eundem locum eadem linea eadem velocitate tendet, propter eandem rationem: hoc est, quoniam corpora impenetrabilia sunt, & corpus *a* versus *b* se movere nititur; & præterea corpus B ibi obvium cum omnimoda & ab omni impedimento libera indifferentia; liquet corpus B se debere movere versus *b* qua eadem velocitate, corpus *a* se movebat versus eundem locum. Ita videtur non plus laboris esse ut comprehendas, corpus naturaliter movere posse aliud corpus; quam ut concipias duo corpora esse impenetrabilia, & corpus se movens aliud offendere posse.

XVII

*In concursu duorum corporum percussio fit quæ mutua est, & æqualiter in utroque corpore recipitur.*

XVII. Jam considerandum in concursu duorum corporum, certam fieri percussionem, quæ nihil aliud est, quam concussio duorum corporum ad se invicem accedentium & ita impenetrabilitate sua invicem se impedientium. Enimvero cum sæpissime non nisi unum corpus sit, quod se movet, & quod percutit, quamdiu alterum immobile manet, & percussionem excipit; percussio semper mutua est, & æqualiter recipitur in utroque corpore, ita ut quan-




tum corpus *a* percutit corpus B, tantum & ipsum percutiatur. Quod facile concipiemus, si supponimus duo hæc corpora esse plane similia quoad massam, figuram, duritiem; & si ulterius nobis imaginemur, ea sensum habere, & dolorem sentire posse, cum percutiuntur: tunc enim manifestum est corpus *a* percutiens B, tantum doloris sentire ac B: uti videmus manum, aliam manum percutiendo, sibi ipsi tantundem mali afferre, quam alteri, si æque mollis sit. Idem concipitur supponendo duos clavos plane æquales ad dimi-

diuin

dium solummodo defixos alterum in corpore *a* corpore B alterum, inque motu corporis a contra B duo capita clavorum se offendere: concipimus enim quod in hac percussione duo hi clavi infigantur magis & nulla detur ratio, quæ nobis persvadeat, clavum in B magis infigi ac eum, qui est in *a*; e contrario quoniam ambo clavi æquales sunt, & in æquales cuspides desinunt, corporaque æquali duritie prædita, absque ulla alia differentia; necessum est, duos hos clavos æqualiter percuti & unum tantundem infigi ac alterum. Itaque pro axiomate generali ponere possumus, quod *dum duo corpora se percutiunt*, percussio mutua & æqualis sit ab utraque parte.

XVIII. Jam redeamus ad exemplum nostrum. Corpus A se movet cum uno gradu velocitatis versus *a*, ibique offendit recta corpus B, per concussionem ipsi communicat suum motum, qui corpus B cum uno gradu velocitatis ad *b* pellet, secundum ea quæ monstravi §. 16. Quoniam ergo percussio quam corpus B. accipit est unius gradus, h. e. capax ad promovendum corpus B. cum uno gradu velocitatis versus *b*, sequitur repercussionem quam accipit

*Corpus mobile offendens aliud corpus quiet um ipsi omnem suum motum communicat, & eo ipso immobile manet.*

cipit eodem tempore corpus *a*, esse quoque unius gradus, h. e. ut possit




corpus *a* cum uno gradu velocitatis pellere ad partes oppositas, h. e. versus A (percussiones enim hæ pellunt & pulsant duo corpora ista ad loca óppoſita, unum ad *b*, alterum ad A) Et cum jam corpus *a* unum gradum impetus seu velocitatis habeat, ut iret versus *b*; nunc vero similem accipiat ut recedat versus A: necessum est corpus hoc manere immobile in puncto *a*, absque progressu aut regressu; quoniam æqualiter ad loca opposita pellitur. Sic in percussione hac corpus *a* motum suum & velocitatem corpori B communicat, & interim ipsum immobile manet.

*Quid sit velocitas absoluta & respectiva talis?*

XIX. Supponamus jam duo corpora ista moveri, unum versus alterum in eadem linea; unum de *b* cum uno gradu velocitatis versus B, alterum ab A cum simili velocitatis gradu versus *a*, ubi concurrunt, & videamus quid accidet. Percussio non solum hic erit unius gradus, sed duorum; hoc vero ut intelligamus distin-

ſtinguenda velocitas abſoluta corporis alicujus a reſpectivè tali. *Abſolutam* voco, quæ conſideratur in corpore comparato cum ſpatio in quo movetur; *reſpectivè talem* eam, quæ in duobus corporibus inter ſe comparatis conſideratur, per quam velocitatem corpora hæc duo ad ſe invicem accedunt aut a ſe invicem diſcedunt. Uti in exemplo noſtro

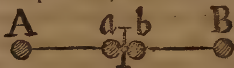



Si conſideramus corpus *b* in comparatione ad ſpatium, v. g. uinius pedis, quod uno minuto percurrit, hoc appellabimus gradum velocitatis abſolutæ. Si vero cum corpore A comparamus, quod de loco ſuo verſus *a* movetur pari gradu velocitatis abſolutæ, ſc. percurrendo etiam pedem uno momento tunc velocitas utriusque reſpectivè talis erit duorum graduum, quoniam ſe mutuo accedunt cum hac velocitate, & uno minuto duos pedes permeant, quibus invicem antea diſtabant.

XX. Enimvero vis percuſſionis non per velocitatem abſolutam ſed reſpectivè talem metienda; quoni- *Percuſſiones ſunt ut velocitates*

*respectivè tales.*

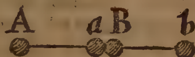
am percussio, quemadmodum diximus non nisi ab impenetrabilitate corporum duorum provenit, quæ ad se invicem accedendo primum suum motum impediunt, & novas impressiones recipiunt. Unde & videmus percussionem tanto majorem esse, quanto accessio hæc mutua velocior erit. Ita ut *percussiones sint semper ut velocitates respectivè tales*, modo reliqua sint paria. Itaque cum corpora duo se invicem accedant cum uno gradu velocitatis absolutæ, & quodlibet pedem migret uno momento de loco suo; manifestum est percussionem quam quodlibet corpus accipiet in *ab*)




eandem futuram quæ foret, si unum immobile manserit in A, donec alterum venisset de B in A, cum duobus gradibus velocitatis absolutæ, per currens uno momento duos pedes qui sunt de B usque ad A: quoniam velocitates respectivè tales semper eædem sunt, sive supponamus, quamdiu unum manet immobile in A, tamdiu alterum se movere cum duobus gradibus velocitatis absolutæ, & uno

unio momento omnes duos pedes percurrere: sive supponamus, utrumque corpus moveri ac sibi mutuo occurrere, quodlibet cum uno saltim gradu velocitatis, ita ut uno momento absolverint duos pedes istos, qui inter ipsos erant ab initio momenti.

XXI. Cum igitur certum sit percussionem in hoc concursu esse duorum graduum; & utrumque horum corporum in hac collisione impressionem accipere quæ cum duobus gradibus velocitatis ipsa ad loca opposita deferret. *Duo corpora sibi mutuo occurrentia recurrunt mutantes velocitatem suam.*




Corpus inquam, *a* accipere impulsum, qui illud ad *A* cum duobus velocitatis gratibus abriperet, & corpus B consimilem accipere, qui id cum similibus duobus gradibus velocitatis in *b*, pelleret, necesse est corpus *a* recurrere cum uno saltim gradu velocitatis versus A, quoniam propulsatur a duabus inæqualibus & plane contrariis impressionibus; una quæ duorum graduum est versus A, quam accipit in percussione & alia unius gradus versus *b*, quam antea habebat; sic illi solummodo su-

perest unus gradus liber ab impressione & velocitate, quæ illud ad A propellit. Et eodem modo B feretur versus *b* cum uno gradu velocitatis, ita ut ambo eadem linea eademque velocitate recurrant qua venerunt. Si nunc supponamus, unum velocius progredi altero, v. g. A, moveri cum uno gradu & dimidio, & percurrere unum pedem & dimidium uno momento: & *b*, moveri cum dimidio gradu velocitatis, ac dimidium pedis percurrere solum: nunc percussio eodem modo duorum graduum existens ac in casu præcedenti, quoniam velocitas respectivè talis eadem est, licet absolutæ differant; necesse est quodlibet corpus duos gradus impressionis accipere & velocitatis ad recurrendum & per consequens corpus B quod dimidium gradum solum habebat velocitatis versus A, recurret cum uno gradu & dimidio velocitatis; cum uno a antea gradum cum dimidio habens versus b, recurrat tantum cum dimidio gradu. Et ita generaliter probari potest, *duo corpora sibi mutuo occurrentia in linea recta recurrere ambo post concursum, mutando velocitates suas.*

XXII.

XXII. Si vero duo corpora moveantur versus eadem loca in recta linea, ita ut id, quod tardius movetur, antecedat & tandem velocius quod sequitur, illud consequatur; tunc ambo pergent moveri in eadem linea ad eadem loca; sed velocitates suas mutabunt. Moveatur corpus A, cum duobus velocitatis gradibus, uno momento duos pedes currens usque ad (a). Eodem

*Duo corpora se moventia versus eadem loca, pergunt post concursum, velocitates suas mutando.*

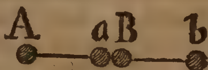



tempore corpus B moveatur in eadem linea cum uno velocitatis gradu, unum solummodo pedem percurrens usque ad (b) & ibi corpus (a) illud consequatur: quoniam vim percussionis metimur, uti ostendi, per velocitatem respectivè talem; percussio hæc non debet esse nisi unius gradus. quoniam ambo hæc corpora ad se invicem non accedunt nisi cum uno gradu velocitatis, & uno momento unum respectu alterius nonnisi pedis spatium migrat, quod ab initio inter illa erat. Cum igitur corpus (b) antea unum gradum velocitatis habeat, qui illud versus *a* fert, & jam in percussione alium ad eadem loca recipiat; necesse

est ut cum duobus gradibus moveatur, & duos pedes usque ad *b* percurrat: dum corpus (a,) antea duos gradus velocitatis habens versus (b,) & jam unum ad recedendum versus B accipiens, versus *a* cum uno *gradu velocitatis currere cogitur.*

*Corpus duram pulsans aliud corpus immobile, recurrit cum omni sua velocitate.*

XXIII. Si corpus percussum plane moveri nequit; videamus qualem vim percussio habeat & quo corpus feriens deveniat.



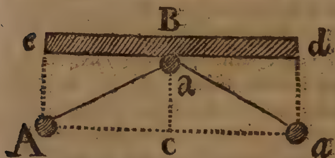

Ponamus corpus A se movere uno gradu velocitatis versus *a*, ibique offendere corpus B indifferens ad motum, ita tamen ut adsit lamina aliqua aut superficies ipsa quoque indifferens ad quietem vel motum, sed quæ penetrari nequeat; hoc casu corpus *a*, laminam hanc feriens, hac mediante & corpus B ferit, quod proxime post illam reperitur. Et cum alias supponam laminam istam non nisi impenetrabilitate sua resistere; manifestum est, (per id, quod evicimus §. 18.) in hoc concursu corpus *a* immobile manere in *a*, & tam laminam quam corpus B moveri versus *b* cum uno gradu velocitatis. Si vero supponamus, eodem tem-

tempore quo A ferit laminam in *a*, eodem quoque B. eam pulsare in B, immobilis lamina manebit, quoniam æqualiter per latera opposita concutitur; & quodlibet corpus recurret cum suo gradu velocitatis, cum quo venerat. Nam, uti dixi, ambo corpora se feriunt, lamina haud obstante, ac si nihil inter illa esset. Quamobrem, si nihil intermedium esset, cum eodem velocitatis gradu recurrerent, uti probatum §. 21. Itaque licet lamina hæc ibi existat, non tamen desinent recurrere, Cogitemus jam hanc laminam esse impenetrabilem & insuper planè affixam, ita ut nec moveri nec flecti queat; & ponamus accurrere ut antea hæc corpora A & *b*, quæ eam concutiant, eodem tempore in *a* & B: dico hac collisione facta, utrumque corpus cum eodem velocitatis gradu reverti debere; quoniam si lamina indifferens fuisset & non affixa, recurrissent, & lamina immobilis facta fuisset. Ast idem effectus sequetur, licet supponamus, laminam hanc esse per se immobilem, affixam & firmam; quoniam utroque modo absque ulla actione aut motu manet. Si denique supponamus solum corpus A se movere versus *a*, & laminam affi-

xam & firmam pulsare, dicendum quoque corpus *a* recurrere versus A: quoniam recurreret si eodem tempore corpus *b* impetum fecisset in B: recurrit igitur etiam licet corpus *b* non venerit, quoniam lamina immobilis existens semper eundem effectum habet respectu corporis *a*, sive B eam concutiat sive non. Et sic demonstratur, corpus durum impingens in aliud corpus durum inflexile & immobile, reflecti cum omni suo motu: quod neminem adhuc demonstrasse puto.

*Angulus reflexionis similis est angulo incidentiæ.*

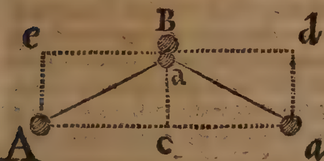
XXIV. Hactenus semper supposuimus, percussiones recta linea factas; videamus modo quid accidat si corpora se pulsent oblique aut a latere; hoc ut comprehendi clarius possit, semper globis aut planis corporibus utar; & sic facile intellectu erit, quid eveniat corporibus figuras irregulares habentibus. Moveatur globus A versus (a) oblique feriens




corpus immobile B. Per punctum

atta-

attactus ducatur linea recta *e d*, postea parallela A *e a*, deinceps *c a*, aut B *d* æqualis *e* A, vel B *e*: dico globum recurrere per lineam (a *a*) ita ut angulus hic reflexionis *a* a *d* semper similis sit angulo



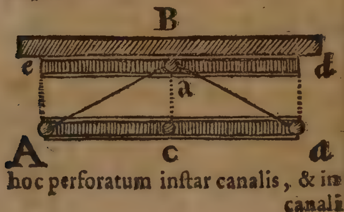

incidentiæ A a *e*. Ad hoc probandum cogitemus globum A accipere una vice duos pulsus aut duas impressiones; unam quæ eum pellit versus *e* cum gradu velocitatis uno, & alteram quæ pellit versus *c* cum duobus gradibus: necesse tunc est se movere in diagonali A (a) & ibi ferire corpus B. Vis autem percussionis solum unius erit gradus: quoniam, ut sæpe dixi, percussio non nisi per impenetrabilitatem duorum corporum fit motus suos impedientium. Sed motus, qui globum pellit versus (*c* a) non impeditur a corpore B. Non datur nisi motus corpus A ad *c* B trudens, qui impeditur a corpore B &

per

per consequens omnem vim huius percussionis metimur per velocitatem respectivè talem quæ corpus A accedere facit versus lineam *e* B: Percussio etiam in hoc casu eadem est ac si corpus A solum de *e* in (a) moveatur cum hoc solo gradu velocitatis: sic in percussione reverti cum eodem velocitatis gradu debet, & progredi versus *c a*, uti antea tendebat versus *e* B, quamdiu alter motus totus manet versus *a d*. Unde sequitur globum recedere per lineam.(a*a*.)

*Obliquum motum e duobus motibus componi nobis imaginari possumus.*

XXV. Hoc quoniam momenti alicujus est, alio adhuc modo ut explicetur intererit. Imaginemur corpus B immobile, & aliud corpus A *a* pariter inter linea A *e*, *a d* se movere, & impingere in corpus illud immobile; tunc secundum ea, quæ probavi §. 23. corpus hoc totum reflectetur versus A a cum eadem velocitate. Imaginemur adhuc nobis corpus




hoc perforatum instar canalis, & in canali

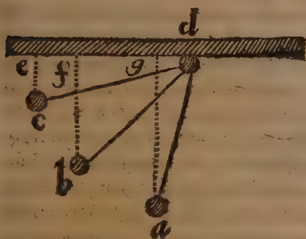
canali globum volvi ab A versus *a*, ita ut eodem tempore, quo totum corpus movetur ab A usque ad corpus immobile B. globus in canali suo percurat A *c*. Quamdiu ergo totum corpus recurret post percussionem, globus perget moveri in canali suo a *c* versus *a* cum eadem sua velocitate. Vera jam via quam globus hic percurrit, erit A a *a*, ut angulus reflexionis sit æqualis angulo incidentiæ, quoniam tam lineæ A *c*, *c a* quam A *e*, *d a*, sunt æquales. Manifestum hinc eandem fore percussionem, & consequenter eandem reflexionem, si globus impegerit immediatè, veniens de A in (a), ac si canalis A *a* impegisset, dum globus in canali fine ulla interruptione cucurrisset. Unde concludere possumus, quod in omni motu obliquo, cum corpus aliquod ferit aliud obliquè, duos quasi motus distinguere possimus, unum quem *Perpendicularem* appellabimus, qui illud inducit ut feriat corpus, & recipit mutationem in percussione; alterum *Lateralem*, per quem corpus aliquod prolabitur in alterum ita ut id non feriat, & qui consequenter totus manet post percussionem. Hic motus

perpendicularis ille est, qui globum fert versus *e d*, cujus velocitas per perpendicularem A *e* mensuranda: & lateralem motum pariter metimur per parallelam A *c*, qui post percussionem versus *e a* pergit.

*Animadversiones in Argumentum P. Riccioli.*

XXVI. Non possum non duas animadversiones addere occasione obliquæ percussionis. Una spectat ad argumentum quod unus Magnorum nostri seculi Virorum protulit, ad decidendam quæstionem de motu Terræ. Contendit, si corpora gravia descenderent in linea curva, qualem describit Galilæus, percussiones eorum non fore sicut eas videmus esse. Quanto altius enim corpus decidit, tanto fortius ferit: ita ut percussio decies aut vicies fortior sit in lapsu centies vel 400ties sublimiori: Interim in hypothesi quam Autor, de quo loquor, oppugnat, vis percussionis, ut ipsi videtur, semper eadem esse deberet; ad minimum nulla foret sensibilis differentia, qualis etiam differnetia inveniatur in altitudinibus lapsum: quoniam corpus grave incederet in linea hac curva velocitate ubique ferme uniformi & sicut vis percussionum semper velocitati proportionata est; concludit, veloci-

citatibus in omnis generis altitudine æqualibus semper existentibus percussiones æquales quoque fore. Argumentum verò hoc nihil concludit, quoniam velocitate semper eadem manente percussiones diminui possunt, si sunt obliquæ; & si cogitamus globos *a*, *b*, *c*, ferire murum in *d*, eadem plane velocitate, sed alterum alterò obliquius; certe percussio ejus qui directè magis ferit, admodum major erit; & vim harum




percussionum obliquarum, uti ostendi, per perpendicula *c e*, *b f*, *a g*, metimur. Sic ut globus adeo obliquè ferire possit, ut tantum leviter attingat murum absque ullo quasi effectu. Licet igitur pondera, quæ in curvi linea decidere supponuntur, moveantur uniformi quasi velocitate, non desinent

sinent tamen fortius ferire, quando altius deciduńt, quoniam tunc percussio directa magis erit: & revera, si calculum inire velimus, (quod facile factu per illum quem Autor fecit:) reperiemus obliquitatem hanc motuum semper esse talem quali opus est ad diversitatem illam, quam videmus in percussione corporis cadentis.

*In astronomia reformata.*

*Animadversio in Castella quadam.*

XXVII. Altera animadversio concernit id, quod vidi in quibusdam nostrorum castellorum, ubi ædificantes, oblectationem oculorum fortitudini murorum prætulerunt, & cum eos planos & æquos extruere deberent, eosdem multis ornamentis lapidum, præ cæteris prominentium distinxere: imo singulos lapides adamantium instar inciderunt, ad minimum limbum fecerunt eosdem angulatim ponendo ubique, ita ut lapides juncti, inter duos secessum quendam relinquant ad modum architecturæ rusticæ. Dico si omnis hæc varietas accepta est visui, eandem quoque damnosam admodum esse defensioni. Recessus enim hi & prominentiæ lapidum aggeribus tormentorū obliquis idem præbent commodum, & eandem vim, quam habent aggeres directi. Sic globus, qui per obliquum inci-

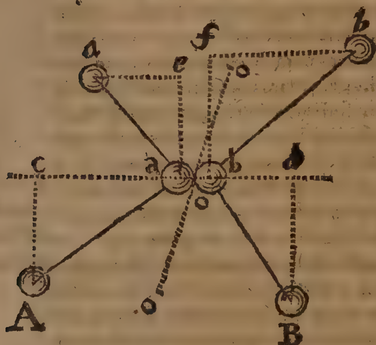
deus in murum, cum leviter modo attigisset, si planus omnino fuisset, jam prominentes tangens lapides, eundem effectum habebit, & æque magnum vulnus dabit, ac si prorsus perpendiculariter feriret. Imo plus efficiet, cum lapis per obliquum facilius eruatur, qui se globo exponens non sustinetur a reliquis, uti tunc, si rectâ lineâ peteretur versus crassitiem muri. Sed recedamus in viam.

*Generalis regula omnium percussionum.*

XXVIII. Hac distinctione duorum motuum in motu obliquo factâ, facile est generalem regulam constituere omnes percussionum effectus explicantem. Ecce propositionem cum figuris omnes casus possibilos percussionum obliquarum exprimentibus, imo & rectarum, dum corpora sunt firma. Moveatur corpus A versus (a) cum velocitate (Aa) & corpus B cum velocitate (Bb) in linea (Bb.) aut sit alterutrum immobile, ita ut (Bb) non nisi punctum sit. Concursus fiat in (ab) Jungamus centra per lineam (ab) ab utraque parte continuatam, si opus est. Ducantur perpendiculares, A *c*, B *d*. distinguere hic duos motus in quovis globo possumus? unum perpendicularem, ac si

corpus

corpus A devolutum sit de *c* usque ad (a) & corpus B de *d* usque ad (b.) Alter motus







la-

lateralis eſt, qui corpus A verſus *c* protrudit, & corpus B verſus *d*; lateralis hicce integer manet poſt percuſſionem in utroque corpore cum contra percuſſione per motus perpendiculares factà. motus hi perpendiculares mutentur ſecundum jam demonſtrata; h. e. corpus (b) accipiet motum & velocitatem perpendicularem (c a) & corpus (a) accipiet velocitatem & motum (d b.) Ducatur jam linea (a e) æqualis & parallela lineæ A *c*, & linea *e a* æqualis & parallela (d b) dico corpus *a* motum iri poſt percuſſionem in linea recta (a *a*) cum velocitate (a *a*.) Et eôdem modô ducatur (b f) æqualis & paralela B *d*, & linea *f b* æqualis & paralela linea (c a) dico corpus (b) motum iri in linea (b *b*); cum velocitate (b *b*); id quod nova probatione non indiget.

XXIX. Notandum, non verum eſſe, ſemper tantundem motus abſoluti adeſſe poſt percuſſionem, quantum aute eandem adfuerit. Sed facile admodum eſt demonſtratu, motum reſpectivum ſemper eſſe eundem; ita ut corpora ab invicem diſcedant peractâ percuſſione, & æque velociter quidem, ut antea accede-

*Quantitas motus reſpectivi ſemper æqualis.*

cedebant; ita si duo tempora æqualia ante & post percussionem accipiamus A B distantia semper æqualis est distantiæ *a b*. Imo postquam motus explicavero, qui in spacio pleno contingunt, facile mihi probatu fore credo, in generali respectu ad omnia totius mundi corpora, hodie tantundem motus respectivi esse, non plus nec minus, quantum fuit sub initium creationis Mundi.

*Medium inter duo corpora, semper uniformiter in recta linea movetur.*

XXX. Notandum adhuc, punctum in medio duorum corporum consistens, semper uniformiter in linea recta moveri, & semper ad eundem tendere locum absque ulla interruptione. Itaque si duo tempora æqulia ante & post percussionem accipiamus, & supponamus, (o) esse punctum medium inter duo corpora tempore percussionis, & O etiam medium esse duorum corporum ante percussionem, sicut *o* post eam; O o *o* erit in linea recta, & (Oo) æquale (o *o*: in quo demonstrando non occupabor, licet geometricè fieri possit.

*Omnes hæ regulæ veræ sunt, sive corpora sint æquila*

XXXI. Mirum absque dubio videbitur, me in omnibus regulis præcedenbus non fecisse mentionem æqualitatis aut inæqualitatis corporum, quorum unum in alterum impin-

pingit. Et primo intuitu videtur me *f. non.* necessario supponere corpora perfectè æqualia ut ea quæ dico vera sint: si enim unum unum majus alterô, omnes hæ regulæ diversæ erunt; & experientia docet, corpus magnum, si in aliud minus impingat antea immobile, non amittere motum post collisionem, licet lentius pergat: e contrario minus illud si impingat in aliud, cum parte velocitatis suæ reflecti. Sed quando hic omisi distinguere casus æqualitatis aut inæqualitatis corporum, hoc destinatô consilio feci: semper velocitatem & motum confudi. & indicare volui omnes hasce regulas veras esse, sive corpora sint æqualia sive non. Et si observare volumus vim rationis, quam §. 16. attuli, eadem semper est licet corpora sint diversarum magnitudinum. Corpus enim percussum, cum plane indifferens existat sive ad manendum in quiete in sive ad motum capiendum, & omnis effectus ab impenetrabilitate corporum derivetur: si supponamus jam corpus percussum esse majus, modo omnes ejus partes sint benè unitæ necesse est moveri illud eadem velocitate ac corpus feriens, per eandem rationem quæ obtinent, cum sunt æqualia; quoniam scili-

scilicet impenetrabilia sunt, & corpus feriens non ulterius moveri potest, quin corpus, quod feritur & ante illud est, omnem ejus velocitatem capiat. Et cum alioquin majus æque indifferens ad quietem & ad motum sit ac corpus æquale; certe idem majus non magis resistet ac æquale, quoniam neutrum nullo plane resistet modo ne minimo quidem. Si verò experientia contrarium nos docet, hoc inde venit, quod motus corporum quos videmus, non in vacuo, uti hactenus supposuimus fiant, sed in spatio corpore aliquo fluido pleno, qualis est aer aut alia adhuc subtilior substantia. Considerandus ergo venit motus corporum solidorum in substantia fluida.

*Corpus in pleno æque libere se movet ut in vacuo.*

XXXII. Si substantia hæc perfectè fluida est, h. e. si omnes ejus partes, tam parvæ quam magnæ flexiles & liquidæ sunt; si præterea hæc substantia perfectè plena est, ita ut nec condensari nec rarefieri possit, sicut spongia quæ comprimitur aut dilatatur propter poros suos suos; si tandem alicui loco inclusa, unde nullatenus exire possit; tunc corpus durum, quod in medio liquoris hujus moveri incepit, æque libere motum

conti-

continuabit, ac in vacuo, & ad extrema usque liquoris tendet, ubi obstaculum immobile reperiens, eâdem cum velocitate reflectetur, & ita in æternum movebitur. Ratio hujus rei est, quod dum corpus durum movetur in liquida substantia, reflexio impetus fiat, quæ eodem momento omnibus liquoris partibus communicatur, ita ut corpus movens impellat partes liquoris ante existentes; & ita gradum sistere deberet, si alia res non superveniret, (per §. 18.) sed partes hæ liquoris impulsæ semel, alias quoque impellunt & ita ad extremas usque impulsus defertur: hinc reflexio oritur, per quam partes quæ post corpus durum existunt, eadem vi impelluntur ad insequendum idem corpus. Quoniam liquore inclusus, & condensare se nequit nec vacuum offendit, nullatenus partes anteriores moveri possunt, quin & posteriores f. corpus insequentes eadem quoque vi moveantur. Ita quantum corpus durum impeditur a partibus præcedentibus tantum & propellitur a posterioribus: & per consequens si motus semel incepit, pergere tenetur sicut in vacuo. Hinc videmus eos non congrué argumentari, qui necessita-

tem

tem vacui per motum demonstrare & probare sustinent.

*Motus pedetentim diminuuntur in aere.* XXXIII. Si vero corpora dura in liquore spongioso sunt qui possit comprimi, aut qui non ita terminis inclusus, quin extrema sua cedant aliquantum; tunc motus non erit perpetuus, sed paulatim desinet & tandem plane evanescet. Corpus enim durum plus resistentiæ sentiet in partibus anterioribus liquoris, quam impulsus â posterioribus recipiet: quoniam sicut liquor anterior comprimitur, aut extrema cedunt, communicatio impressionis perfectè fieri nequit, & sic posteriores liquoris partes non tantum pellentur quam anteriores, & consequenter non adeo corpus durum pellent uti anteriores retinent. Hinc est quod omnes motus nostri in aere & aqua aut alio liquido cessent, quoniam certum est aërem esse spongiosum, & facile comprimi, reliquos liquores vero non nisi aere terminari quando in aperto positi, aut ad minimum limbô alicujus vasis, quod cedere & flecti potest, quàm parvum etiam fuerit. Experientia enim nos docet, vasa vitrea, imo & ferrera vel ærea, flecti quando punguntur.

XXXIV.

XXXIV. Percussiones corporum quæ in liquoribus moventur, differunt in quibusdam ab iis, quæ in vacuo fiunt. Hujus rationem ut intelligamus, notandum, quod dum corpus durum in liquore movetur, eidem liquori motum suum communicet, ita ut ille quoque moveatur, corpus durum insequendo, hoc modo, ut ipse dividatur & aperiatur ante, & equatur claudaturque post corpus, ut si corpus per accidens quoddam motum suum perdat, liquor nihilominus ita ad motum determinatus corpori motum suum redderet & secum traheret, eô fermè modô, ut rivi & flumina aquis suis innatantia ligna deportant. Quod si igitur aliquod corpus feriet aliud sibi æquale, idem ipsi eveniet, quod in vacuo; quoniam si corpora hæc duo æqualia, æquali liquoris quantitate involvuntur, quantum liquor corporis impulsi corpus idem impedit, quo minus libere moveatur, tantundem liquoris quantitas circa corpus feriens existens, de novo etiam tam impellens ferit corpus quam impulsum: motus eorundem post percussionem erit ut in vacuo; quoniam resistentia liquoris circa corpus impul-

*Percussiones corporum æqualium in pleno ita ut in vacuo fiunt.*

*Si corpora sunt inaequalia, percussiones aliter in pleno quam in vacuo fient.*

sum per impulsum liquoris circa corpus impellens exactè compensatur,

XXXV. Si vero corpus impellens majus est, necessarium est non tantum percussionis effectum recipere quam alterum quoniam majori violentia per liquorem circumdatum prefertur; videmus enim trabem, per fluminis cursum, deportatum, majorem habere effectum, si in pontem aut molendinum impingit quam baculum per idem flumen deportatum, licet trabs non velocius natet ac baculus: & hoc inde quoniam trabs impingens, adhuc magnâ illâ aquarum quantitate impellitur, quâ circumdatur, cum baculus minus impellatur, ob minorem quem occupat locum & pauciorem aquam quâ circumdatur. Hinc si corpusculum in est & aliud magnum in id impingat, hocce magnum corpus motum suum parvo communicando, non manebit immobile; sicut in vacuo faceret, sed motum continuando alterum insequetur, licet lentius magis. E contrario si magnum quiescit, parvum illud, postquam alterum fecierit, & ipsi partem motus sui communicaverit, reflectetur & partem velocitatis suæ amittere. Ex omnibus hisce liquet, Aristotelem non adeo reprehen

hendendum, uti quidam contendunt, dum ad explicandas causas continui motus quem videmus, *medium* adhibuit, h. substantiam liquidam in qua corpora nostra se movent.

XXXVI. Ad determinandum excessum qui in resistentiis aut maximis corporum horum inæqualium impressionibus esse potest, non credo quenquam appellere animum suum debere, ad minimum si consideramus corpora talia qualia inter nos habemus, quoniam illud dependet a resistentia, quam corpora liquida causantur, in quibus corpora dura, quæ videmus, moventur; a facilitate se condensandi & rarefiendi, quâ gaudent, & multis aliis nobis æque incognitis, ac infinita alia impedimenta, quorum combinatio in infinitum omnes percussionum effectus variare possunt. Hoc solum dicere possum, quod certam hypothesin ponendo, satis naturæ congruam, ostendere possimus per præcedentes regulas percussiones corporum inæqualium eo modo fieri quô Dominus Huygens vult in ultimo suo *Journal des sçavans* s. actis eruditorum. Non multum vero hisce insistam forte in sequentibus occasio dabitur plura de illis dicendi.

*Percussiones corporum inæqualium ad certam regulam reduci nequeunt.*

*De refractione.* XXXVII. Ex dictis patet adhuc ratio refractionum, quæ fiunt quando corpus durum ab uno liquore ad alterum diversæ consistentiæ progreditur; si enim corpus durum a liquore liberiori ad minus liberum procedit, in cursu suo aliquid de velocitate sua amittet, dum majorem resistentiam experitur in liquore anteriori, quam impellitur ab insequenti; hinc refractio fiet recedendo a perpendiculari. E contrario, si corpus a liquore magis impediente ad aliam liberiorem decurrit, refractio fiet per accessum ad perpendicularem, corpus velocitatem in cursu augebit, quoniam per sequentem liquorem magis pellitur, quam retinetur ab anteriori. De hoc velocitatis augmento neminem adhuc rationem dedisse puto. Non refractionum harum mensuras notabo, quoniam alii hoc fecere, & demonstrationes eorum bene iis accommodari possunt quæ supra dixi. Nec magis de refractione luminis hic loquor, quoniam eam multo aliter fieri credo, h. e. per causas & media plane diversa, sicut demonstrare possem, si alium discursum de motu haberem.

XXXVIII.

XXXVIII. Dicendum esset de motu corporum gravium, tam quæ in aëre decidunt vel in eum pelluntur, quam quæ in planis inclinatis currunt aut quæ filo appensa ab utraque parte titubant. Dicendum adhuc de motu liquorum, tam de eorundem casu quam saltu, ut & eorum undulatione, & similibus. Sed hæc totidem requirunt discursus speciales. Et sicuti me invenisse credo aliquid novi in hac materia, non pigebit publico cogitationes meas proponere ut examinetur, si modo viderim primum hunc discursum non indignum judicari, qui legatur ab iis, qui hisce delectantur materiis. *Conclusio.*

---

INDEX.

# PARAGRAPHORUM.

*I. Corpus per se indifferens est ad quietem vel motum. pag. 7*
*II. Si Corpus semel fuerit in quiete, semper inibi permanet.* 8
*III. Et si semel in motu est, semper moveri perget.* 8
*IV. Quietem non esse puram Negationem.* 9

*V. Tantum actionis positivæ in quiete esse quantum in motu.* 10

*VI. Objectiones.* 12

*VII. Causa finita effectum habere potest, qui semper duret.* 13

*VIII. Qualitas illa quam impetum vocant, semper durat.* 14

*IX. Corpora quæ movemus, moveri desinunt, quoniam impediuntur.* 16

*X. Postulatum pro firmitate demonstrationum sequentium.* 16

*XI. Corpus plures successivè determinationes accipiens, ultimâ solum affectum manet.* 18

*XII. Corpus liberum non potest determinari ut moveatur in curva linea, aut velocitate inæquali.* 19

*XIII. Omne corpus circa centrum motum, ab eo recedere conatur.* 20

*XIV. Astra a se ipsis moveri nequeunt.* 21

*XV. Quomodo corpus circulariter moveri possit.* 21

*XVI. Corpuss quod versus alterum corpus movetur, ipsi omnem suum communicat motum.* 21

*XVII. In concursu duorum corporum fit percussio mutua, & æqualiter*

*ter in utroque corpore recipitur.* 24
XVIII. *Corpus mobile aliud corpus offendens quietum, ei omnem suum communicat motum, & ipsum immobile manet.* 26
XIX. *Quid sit velocitas absoluta & respectivè talis?* 26
XX. *Percussiones sunt uti velocitates respectivæ.* 27
XXI. *Duo corpora versus se invicem mota, recurrunt mutata velocitate suâ.* 29
XXII. *Duo corpora ad eundem locum mota, pergunt post concursum, velocitatibus suis mutatis.* 31
XXIII. *Corpus durum in aliud immobile corpus impingens, cum omni suo reflectitur.* 32
XXIV. *Angulus reflexionis angulo incidentiæ æqualis est.* 34
XXV. *Motum obliquum duobus motibus constare credendum.* 36
XXVI. *Animadversio in argumentum P. Riccioli.* 38
XXVII. *Animadversio in castella quædam.* 40
XXXVIII. *Generalis regula de omnibus percussionibus.* 41
XXIX. *Datur semper æqualis quantitas motus respectivi.* 43

*XXX. Medium duorum corporum semper uniformiter movetur, in linea recta.* 44
*XXXI. Omnes hæ regulæ veræ, sive corpora sint æqualia sive non.* 44
*XXXII Corpus in pleno æquè libere movetur ac in vacuo.* 46
*XXXIII. Motus paulatim in aere diminuuntur.* 48
*XXXIV. Percussiones corporum æqualium in pleno ut in vacuo fiunt.* 49
*XXXV. Quando corpora inæqualia, percussiones in pleno aliter ac in vacuo fiunt.* 50
*XXXVI. Percussiones corporum inæqualium ad generalem regulam redigi nequeunt.* 51
*XXXVII. De Refractione.* 52
*XXXVIII. Conclusio.* 53

## AD LECTOREM.

*Cum Autor Tractatus de Motu locali ab amico quodam accepe-rit, nonnullos pagellas prælo ereptas legisse, & publico persuadere illum plane doctrinam Cartesii sequi; imo licet in quibusdam locis eundem oppugnare videatur, utut eum non nominet, nihilominus nonnisi ipsius sensa in hac materia proponere ac con-*

*confirmare, necessarium sibi credidit, eos per sequentes notas, fini dicti, tractatus superadditas priusquam in lucem prodiret, errore exsolvere qui verbis horum nimiam fidem praberent.*

# NOTÆ:
## in Discursum
## DE MOTU LOCALI.

AUtor hujus Discursus probans motum nunquam destrui nisi per determinationem contrariam, de novo supervenientem; sufficienter declaravit quam minus adictus huic sententiæ sit. Sed cum ii, qui hanc materiam tractarunt in Italia, Anglia, Belgio & Gallia ferme omnes in eo conveniant; non discedendum à tam communi sententia credidit. Galilæus, Gassendus, Hobbesius, Regius, Maignan, Digby, Kircher, Fabri & plures alii omnes quodammodo hanc perpetuitatem motus sustinent; & non nisi in modo probandi differunt. Maxime ficulnea omnium probationum est absque dubio Cartesii. Autor hic contendit, quod si motus aut quies, semel incipientes

ceſſent Deus ſit cauſa mutationis; quod judicium riſum movet iis qui primis Theologiam labiis attigere; cum nemo ſit qui neſciat omnes mutationes creaturarum absque ulla mutatione ex parte Dei accidere. *Apud Deum non eſt transmutatio*, inquit Auguſtinus; *ideoque apud eum curſus temporis, diei noctisque alternatione nequaquam variatur.* Satis viſui quoque patet, ceſſationem motus non magis contrariam immutabilitati divinæ eſſe, quam creationem Mundi, aut actiones voluntatis noſtræ, aut viciſſitudinem dierum ac noctium. Si argumentum Carteſii non tam facile reſolvi poſſet, perniciosiſſimum foret, quoniam probaret etiam, Deum omnem motum jamjam in mundo conſpicuum ab æterno feciſſe.

Cum plurimi in eligendis opinionibus ad ſententiam Veterum & doctorum ſcholaſticorum reſpiciunt, addere hic poſſumus quod ultra ea quæ jam dicta ſunt â Vaſquio, qui in probandâ perpetuitate motus admodum prolixus eſt, inquiens, eum ſi ſemel inceperit, nunquam deſiſtere, niſi nova cauſa formam poſitivam & huic motui contrariam producens ſuperveniat; ultra ea inquam, tres

tres magnarum thesium Lugdunensium diversis temporibus factæ, idem volunt. Insuper Aristoteles addi potest. En verba ejus Lib 3. de Meteoris, cap. 2. *Si corpus quoddam absque gravitate & levitate existens movetur; necessum est moveri per peregrinam quandam vim; & semel ita motum, in infinitum movebitur.* βίᾳ δὲ κινούμενον, ἄπειρον ποιεῖν τὴν κίνησιν. Et lib. 4. Physic. text. 69. loquens de corpore moto in vacuo quodam, ubi nullum genus impedimenti adesse præsupponitur, in hæc verba erumpit. *Nemo indicare potest quare corpus* hoc modo in *vacuo motum, in aliquâ parte gradum sistat. Quare enim potius hic quam illic* quiesceret? *hinc aut plane non movebitur, aut* si moveri incipit, *in infinitum moveatur necessum est, nisi a fortiori quodam* retineatur. οὐδεὶς ἂν ἔχοι εἰπεῖν, διὰ τὶ κινηθὲν στήσεταί που; τὶ γὰρ μᾶλλον ἐνταῦθα ἢ ἐνταῦθα; ὥς ἢ ἠρεμήσει, ἢ εἰς ἄπειρον ἀνάγκη, φέρεσθαι, ἐὰν μήτε ἐμποδίσῃ κρεῖττον.

Cartesius pessimè utitur principiô §. 13. explicatô, *Omne corpus,*

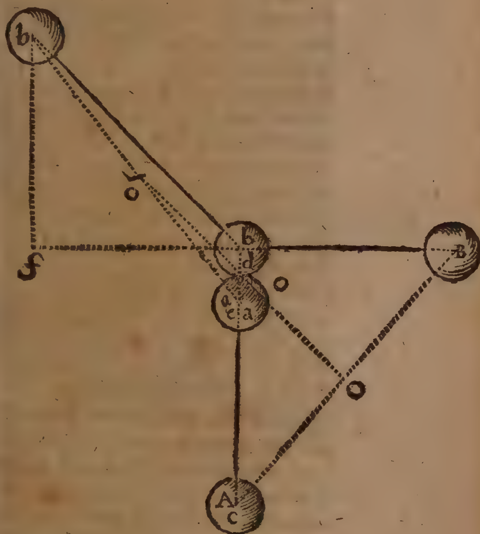
*quod circa centrum movetur, inde discedere conatur.* Ostendere possumus ipsum falli, dum eo ipso gravitatem corporum explicare vult. Nec tam latè hoc principium accipimus sicut Cartesius. Approbamus potius restrictionem Docti illius Viri, docentis, verum illud esse in motibus artificialibus, non vero in naturalibus.

In §. 16. & sequentibus probata, monstrant Cartesium in sex ex septem regulis de motu falli.

Nullatenus fovemus sententiam de motu terræ, in §. 26. Autor discursus hujus plenissimè persuasus est, quod, licet nulla detur Sacra Scriptura, hypothesis de immobilitate terræ præferenda sit alteri. Tantum monstrare voluit argumentum hoc nihil evincere; meliora enim adsunt, imprimis id, quod de motu tonico magnetis desumtum, in magni momenti occasionibus multum valuit.

§. 29. Cartesio contrarius est, qui motum absolutum, quem ibi vocamus, a respective tali non distinxit. Et cum dicit semper æqualem esse motum ante & post percussionem, de absoluto motu loquitur; hinc videmus

demus eum hac in re falli. In figura enim ſequenti, ante percuſſionem, motus duotum globorum A & B eſt A a, B b, & totus motus poſt percuſſionem in ſolo globo (b) collectus ſaltim eſt (b *b*) altero globo immobili manente in *a*.



Dum in §. 31. mentio fit substantiæ aere subtilioris, non credendum, esse materiam subtilem Cartesii Quilibet novit corpora dari subtiliora aere, quem respiramus. Et cum Aristoteles in compositione universi sphæram aeream aquæ superimponeret, etiam ignem aeri superimposuit & *Ætherem* super ignem; quæ omnes diversæ sunt substantiæ tanto subtiliores, quanto magis elevantur.

Contendimus §. 37. Cartesium refractiones corporum non probasse, & multo minus luminis.

# *ANNOTATIONES IN EPISTOLAM* CARTESII

lumen concernentem

Epitome Epistolæ 17. tom. 2. Cartesii.

*Mi Domine,*

Lubens intelligo, te nuperam quæstionem inter nos motam, reassumsisse. Sed quoniam video argumentum meum quo tum utebar, tibi nondum satisfecisse, libere tibi dicam, quid de responso tuo sen-

sentiam, præmittam tamen brevem descriptionem; ut de statu controversiæ simus certi.

Cum nuper congregati essemus, dixi non revera lucem uno momento moveri, uti tu scribis; sed (quod idem esse credis) a corpore lucente uno momento ad oculos nostros pervenire: Addebam, me credere tam certum esse in hac re, ut si falsi possem convinci, paratus sim confiteri me nihil in tota adhuc scire Philosophia. Tu vero e contrario asserebas lucem in momento non moveri, dicebas quoque te invenisse modum illud experientia demonstrandi, ut facile pateret quis nostrum falleret. Et hæc experientia, purgata, uti jam est, a quam plurimis rebus superfluis, v. g. sono, malleo bicipite, & ejusmodi rebus, h. e. ita, ut jam in literis tuis sine dubio multo melius quam prima vice exponis, talis est.

Si quis noctu facem manu portans, eandem moveat & in speculum oculos convertat, per quadrantem milliaris ab ipso distans, facile animadvertere poterit, num motum in manu sua existentem, prius sentiat, quam mediante speculo videat.

Tamque certus de hac experientia eras, ut crederes totam tuam Philosophiam falsam, si non notabile, & sensibile tempus occurrat, inter momentum illud, quo motus hic ope speculi videtur, & illud, quo iste in manu sentitur. Ego regerebam, si minimum intervallum intercederet, paratum me confiteri, totam Philosophiam meam destructam esse. Et tamen (quod notandum) in tota nostra disputatione non tam de eo agebatur, si lux in momento quodam transmittitur, aut aliquo tempore indigeat, quam de successu experientiæ hujus. Sequenti quoque die, ad finiendum certamen nostrum & te inutilis sublevandum laboris, tibi indicabam, aliud adesse experimentum sæpius ab aliquot millibus personarum factum, imo ab accuratissimis & attentissimis, per quod manifeste videre possimus, nullum intervallum temporis esse inter momentum quo lumen e corpore lucente exeat, & illud, quo in oculos nostros incurrat.

Antequam tibi illud exponerem, interrogabam an non concederes lunam a Sole illuminari, & ecclipses ex inter positione terræ solenniter & lunam,

lunam, aut per interpofitionem lunæ inter folem & terram: quod concedebas facile. Poftea rogabam fecundum quam lineam fupponeres lumen pervenire ab aftris ad oculos noftros: & refpondebas, *fecundum rectam lineam*: ita ut fi folem afpiciam, ille non in eo appareat loco ubi revera eft, fed ubi eo momento erat, quo lumen ex eo egreffum, cujus vi folem videmus. Tandem rogabam, ut determinares quantum ad minimum debeat effe intervallum temporis fenfibile, inter momentum quo fax mota & momentum quo motus ejus ope fpeculi fentitur, milliaris quadrante diftantis. Ad hæc præcedenti die refpondebas, ad minimum tantum temporis effe, quantum oportet ad pulfum arteriæ; tunc vero temporis dicebas, me poffe accipere tale intervallum temporis quale vellem. Ne vero abuterer venia quam dabas, nonnifi vigefimam quartam partem temporis accipiebam de pulfu arteriæ, dicebamque hoc temporis intervallum, quod pro tua fententia plane infenfibile effet in tuo experimento, admodum fenfibile effe in meo.

Nam fi ponamus lunam a Terra diftare quinquaginta femidiametris

&

& unicum terræ ſemidiametrum continere ſexcenta miliaria (id quod ad minimum ſupponendum eſt, aut Aſtronomia & Geometria fallunt ſi lumen vigeſima quarta parte indiget temporis quod arteriæ adhibent, ut ſemel pulſent, ad bis quartam milliaris partem percurrendam tum tempore indiget, æquali iſti quod arteriæ adhibent ut quinque millies pulſent, i. e. ad minimum hora, ad percurrendum bis ſpatium quod eſt terram inter & lunam, uti cuivis apparet qui calculum ducere conabitur. Jam vide quomodo argumentatus ſim.

Sit A B C linea

A B C

recta: & ad concludendam eandem rem, vel terram moveri ſupponamus, vel ſolem, ſint tn. A B C loca ubi ſol, Terra & Luna interdum occurrunt ſibi invicem; ſupponamus jam e terra B lunam obſcurari in puncto C: eclipſis hæc, ſecundum ſupra conceſſa, præciſe nobis apparere debet eodem momento quo lumen e ſole ortum, cum in puncto A eſſet, a luna refractum ad oculos noſtros perveniret, ſi non fuiſſet impe-

impedita ab interpositione Terræ; i. e. secundum jam concessa, hora post luminis ad terram B accessam. Et adhuc sicut etiam concessum, sol non potest videri in puncto A, nisi præcise eodem momento sit, quo lumen ejus directe ad terram pervenit: Et tamen luna non poterit esse obscurata in C, nisi una hora post Solem visum in A; si concessa tua vera sunt, hoc est, si vigesima quarta parte pulsus arteriæ, motus facis in speculo quod quarta parte milliaris distat, tardius observatur quam in manu sentitur.

Accurata vero observatio quam de ea Astronomi fecere, confirmata per infinita experimenta, satis docet, quod si luna obscurata terram B in C videamus, sol non videri potest in puncto A per horam, citius, sed eodem momento quo eclipsis apparet. Tempus horæ integræ certe sensibilius in observatione loci solaris respectu terræ & lunæ, quam in experimento tuo vigesima quarta pars unius pulsus arteriarum. Consequenter & experimentum tuum inutile est; meum vero quod omnium est Astronomorum, clarissime monstrat, lumen videri absque intervallo tem-

poris

poris sensibilis, h. e. uti probavi, uno momento. Argumentum hoc demonstrationem esse contendebam; tu vero e contrario dicebas esse paralogismum petitionemque principii. Facile vero e responso tuo patet, nam recte illud hoc nomine indicaveris. Nam &c.

*Notæ.*

Non disceptare proposui ea quæ Cartesius de lumine dicit, *illud sc. e corpore lucido uno momento ad oculos nostros pervenire.* Cum ipso consentio in hoc puncto, persuasusque sum effusionem luminis non fieri posse per successivum subtilis cujusdam substantiæ fluxum. Saltim argumentum ejus examinabo, ut quilibet judicare possit, an argumentum ejus allatum, demonstratio sit uti contendit, an tantum paralogismus, sicut ipsius adversarius ei objicit.

Cartesius ab initio ponit lumen horam consumturum ut a luna ad nos perveniret, si vigesimam quartam partem pulsus arteriarum adhiberet ut veniret a speculo, quod quadrante milliaris distat. Supponit eo ipso, tempus motus luminis eadem proportione tanto majus esse debere, quanto majus spatium est, quod ipsi percurrendum: id quod ipsi optima ratio-

ratione negari poteſt. Nam licet luna duodecim millies magis diſtet a nobis, ac ſpeculum iſtud; inde tamen non ſequitur duodecim millies plus temporis lumini deberi ut a luna veniat, quam a ſpeculo: quoniam fieri poteſt, ut lumen citiſſime moveatur in magno iſto ſpatio quod eſt verſus cœlum, & tardiſſime in brevi hoc ſpatio, quod prope terram eſt, quoniam hic inferior aer ſpiſſior eſt, ut motum luminis retardet; cum ſupra nos, materia, unde Carteſius cœlum componit, ut infinite ſubtilior, lumini medium concedit, quo moveatur majori velocitate quam concipi poteſt. Videmus enim globum tormentarium in aerem emiſſum cum incredibili rapiditate tardisſime moveri quando in paludem aut terreum vallum devenit. Et ſicut hic inepte ſatis falleretur, qui, videns globum hunc minutum temporis conſumſiſſe, ut duos aut tres greſſus in terra procederet, inde concludere vellet, eundem globum duo aut tria millia minutorum conſumere, ut illuc veuiat e tormento quod ſupponimus duobus vel tribus millibus paſſuum diſtare: ita dicere poſſumus Carteſium non bene argumenta-

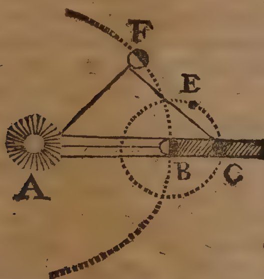
tum

tum, cum inde quod lunam duodecim millies longius distantem supponit ac speculum, lumen quoque duodecim millies plus temporis consumere vult, h. e. horam integram ut a luna huc veniet; præsupponendo, illud consumere vigesimam quartam partem arteriæ pulsus donec e speculo veniat. Fieri quoque potest, ut cum materia hæc cœlestis aerem subtilitate multo magis antecedat ac aer terram, lumen quoque plus temporis consumat percurrendo hoc breve spacium quam consumit donec per magnum illud cœli intervallum ad aerem nostrum perveniat: sicut forte globus plus temporis consumit penetrans duos aut tres passus in vallum, quam veniendo illuc e tormento. Ita ut Cartesius absque ratione horam posuerit pro tempore quod lumen consumat veniendo a luna, Hinc cum tota demonstratio quam deinceps dare vult, huic fundamento superstruatur; necessario tota cadet, fun fundamento hoc labefactato.

Sed non in hoc solum diutius Cartesio contrarius sum; certe magis in progressu argumentationis

suæ

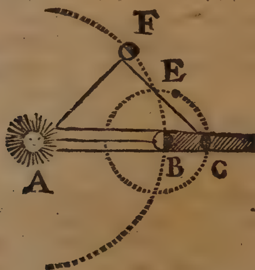
ſuæ falli videtur. Notandum enim eum propoſuiſſe demonſtrationem ſuam, tanquam æque ſtringenten in hypotheſi Tychonis, ac Copernici: *ut concludamus*, inquit, *eandem rem, ſive terram moveri ſtatuas* ſive ſolem, &c. Ponamus igitur Solem immobilem eſſe in centro mundi A; terram reperiri quandoque in B




& lunam in C, ita ut A B C. ſit linea recta; lumen ab A veniens & per B means, conſumere ſemihoram donec perveniat in C, & aliam ſemihoram donec ex C regrediatur in B; videbunt tunc ii, qui terram in B. inhabitant, lunam aut potius ecclipſim ejus in C. Interim tunc etiam iidem adhuc ſolem videbunt in A, ubi non ſolum præcedenti hora

fuit,

fuit, ſed & ubi ſemper immobilis permanſit. Quare ergo Carteſius nunc ſolem in alio loco videri ſtatuit? Concedo ſolem hora ante apparuiſſe in A, quam Luna apparuit in C; interim & hoc dico, hora ſequenti i. e cum luna in C, viſa fuit, ſolem adhuc in A viſum eſſe, quoniam locum non mutavit; & tamen ſolem Terram & Lunam in eclipſi,



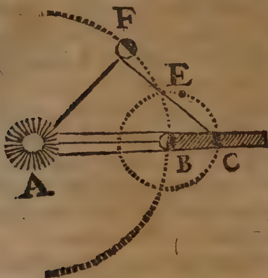

apparere in linea recta. Facile determinari jam poteſt, qui fallatur, cum ſit ſubjectum pure geometricū.

Sed tutius adhuc id fiet, ſi ſcias, quid Carteſius Adverſario ſuo reſpondeat. En litteras: *Si enim recurras, uti facis, ad longitudinem aut tarditatem motus annui, in re plane*

*ne a motu lunæ dependenti, quæ duodecies rapidior est motu annuo, imo in re ubi soliti sumus observare satis commode, non tantum differentiam unius horæ id quod sufficiens esse demonstrarem; sed & dimidii minuti, quis in hoc non agnoscet paralogismum?* Fateor me hic paralogismum agnoscere non posse, imo non possum non in hac Cartesii instantia plurimos videre.

Primo loco dicit, quod totum hoc opus, i. e, defectus lineæ rectæ & oppositionis quæ in eclipsibus apparere posset, *omnimode a motu Lunæ dependeat*, & tamen certum est motum lunæ nihil magis ad hoc conferre, quam si immobilis esset. Imaginemur nobis, Lunam postquam in umbra fuit, adhuc velocius moveri quam moveri solet, & venire in E, dum lumen (sive potius defectus, idem enim est) e C venerit in terram B: tunc secundum omnes suppositiones super quibus Cartesius argumentatur, Luna apparere debet in C quoniam supponitur, Lunam & astra apparere, *non in locis ubi sunt revera, sed in iis, ubi erant eo momento cum lumen, quod facit ut ea videamus, ex iis egrediebatur,*

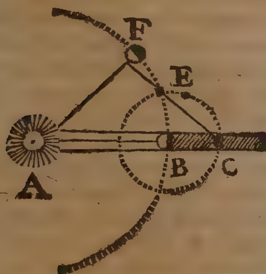
Ita lumen quod jam pervenit




ad nos, procedens e C, ubi luna præcedenti semihora erat, nobis præsentare debet lunam in C, quacunque etiam mundi parte jam sit, si immobilis manserit, aut transposita fuerit; consequenter motui lunæ hic nihil tribui potest.

Secundo loco Cartesius adversarium suum reprehendit, quod allegaverit tarditatem motus annui; ipse vero contendit motum annuum nihil conferre ad rem, *quæ dependet*, inquit, penitus a motu lunæ: Certum interim, quod si quidam defectus oppositionis apparere debet in eclipsi, hunc oriri unice a motu annuo, prout major & sensibilis magis fuerit. Nam si postquam Luna in umbra

umbra terræ in C fuit, terra translata fuerit in F, vi motus annui, donec radii e C ad terram pervenirent; tunc e terra F ſemper ſolem in A videremus & lunam in C: lineæ vero A F F C, non eſſent amplius eadem linea recta, & luna quæ tunc videretur.




in eclipſi, nihilominus ſoli oppoſita appareret. Sic motus annuus diverſitatem & defectum in oppoſitione ſolis apparente & lunæ obſcuratæ efficere poſſet. Cæterum cum motus terræ annuus per horam, admodum parvus, imo inſenſibilis; clarum eſt, adverſarium Carteſii recte recurriſſe ad lentitudinem hujus motus, ut totam ejus demonſtrationem infringat.

Tandem Cartesius ait, *quod eo ipso satis commode non solum differentiam horæ, sed & dimidii minuti obserVare possimus*: quod plane falsum est. Nam si agitur solum de motu diurno, verum est discerni posse usque ad minuta, modo adsint bona instrumenta & aptus sis ad tales operationes instituendas. Sed si propius Solis aut terræ motus observandus est, aut oppositio Lunæ præcise determinanda quas non offendes difficultates? & ex observationibus, & ex calculo, & ex reductionibus? exempla sat illustria habemus hujus difficultatis in observationibus quas circa eclipses horizontales instituere voluerunt: notæ sollicitudines astronomorum, ut viderent annon diversitas detegi possit in oppositione Solis & Lunæ orta ex refractione. Quantumcunque vero solliciti fuerint, ut instrumenta sua ampliarent, quam cautos etiam suis in observationibus & calculo se gesserint; vix affirmare poteris, eosdem differentiam quandam distinxisse, non dico minuti horarii; sed tantum minuti gradus. Quomodo ergo Certesius tam commode simili occasione observari vult, differentiam dimidii minuti horarii?

Hacte-

Hactenus solum examinavimus argumenta Cartesii in hypothesi de motu terræ, in qua eandem demonstrationem esse contendebat. Si jam eadem examinare velis secundum hypothesin communem de immobilitate terræ, non credo demonstrationem ipsius meliorem reperiri. Quam diu enim materia cælestis omnis, quæ solem & stellas vehit, quotidie circa terram movetur; recte argumentari poteris, lumen, a sole aut luna ut ita loquar sparsum, non linea recta ad terram moveri, sed curva & spirali, semper circulariter sequendo motum astri unde projectum; & hoc probari poterit præceptis Mechanicæ, & experientia confirmari eorum corporum, quæ e navi ejicimus; & hoc casu sol & astra apparerent semper in eo loco ubi revera sunt, nisi proprii eorum motus quandam afferrent differentiam. Id quod manifeste satis declarari potest exemplo soni, quem successive per certas undulationes, dilatari norunt omnes, quæ in circulo sese extendunt per aerem. Imaginemur enim nobis totum cœleste spatium impletum aere, sonumque in sole formari;

certe quam diu sol cum toto cœlo se ita moveret circa terram, omnes hæ undulationes circulares aeris eodem quoque tempore transportarentur, a motu aliquo cum centro suo, quod est sol, communi; & ita ad terram delatæ, semper solem & centrum suum designarent non eo loco quo formatæ fuere, prima vice; sed eodem, quo sol tunc reperiretur, semper excepto proprio solis motu, quem ultra motum cum toto aere communem habere posset: Sed quocunque modo explicetur, aut quæ etiam ratio hujus motus spiralis s. circularis




circu-

radiorum luminis detur; certum est, quod motu hoc semel supposito, Luna in eclipsi sua directe soli opposita apparere debebat, ac si lumen uno momento expanderetur. Ponamus enim terram esse immobilē in B, & solem existentem in A, radium ad terram mittere; & dum sol movetur & advenit in (a), radium per spiralem A E vergentem venire in B; tunc radius hic solem appparere faciet in (a) ubi & revera est. Deinceps radius hic A E B, ulterius progrediens, aut potius defectus ejus, semihoræ spatio per spiralem (B e) ibit ad C, ubi luna est. Radius denique aut potius ejus defectus reveniens per spiralem C e, per aliam semihoram ad terram B perveniet, quamdiu Luna transportata fuit per materiam cœlestem usque in C, & tunc per eundem radium, aut potius ejus defectum, Luna videbitur obscurata in C; Eodem vero tempore sol etiam apparebit in altero latere e diametro oppositus in *a*, i. e. in eodem puncto, ubi ante horæ spatium visus est in (*a*:) Et hoc adeo verum est, ut Cartesius, qui

ipse hoc bene advertit, utile duxerit adversarium suum ex alio capite aggredi in hypothesi hac. En verba ejus: *Cum postea dicis, radios ex Sole manantes & luna, etiam extra se moveri circulariter, cum Sole & Luna, ita ut astra nobis appareant semper in locis iis ubi sunt revera, licet mediante lumine videantur, quod ex iis antea promanabat, cum in aliis locis erant, (aliter enim quæ dicis concipi non possunt) manifeste antea concessa negas & unde tota hæc pars demonstrationis meæ dependet, ante explicatæ. Non autem observas te hic cadere in alteram ejus partem, quæ est eclipsis solis.*

Non diu hic inquiram quidnam concessum vel negatum Cartesio, propositum mihi tantum est, examinare argumentum ejus. Monstravi adversarium ipsius eum accusare paralogismi, in prima demonstrationis parte; Videamus jam an accuratior sit in secunda? *Sit* (a), *inquit*, *Sol*, C *Luna &* B *Terra, omnes tres in eadem recta linea, secundum calculum supra factum, si lumen indiget hora, ut veniat a luna* C *ad terram* B, *duodecim horis indigebit ut a sole ad nos veniat, quoniam sol ad minimum*




*mum videcies quater longius distat a terra quam luna. Jam secundum ultimum tuum concessum, eodem momento, quo Sol est in* (a) *videtur ab his qui sunt in B, non obstante interpositione lunæ, quæ interim non solum est in c sed quæ ibi etiam videretur si lumen proprium haberet; Sol enim videtur in loco eo ope luminis, quod duodecim horis ante emanavit ex ea, & quod cœlum lunare semihora ante percurrens, non potuit impediri a luna, quoniam nondum tunc interposita erat inter solem & terram: lumen quoque jam ab ea impeditum, non poterit ad terram venire nisi semihora post; hinc*

*defectus luminis i. e. eclipſis ſolis; non poterit videri, niſi ſemiboræ poſt momentum, quo Sol, Luna & Terra in eadem linea recta ſunt.*

*Experientia vero omnium aſtronomorum contrarium nobis probat; ſc. eclipſin tunc eſſe, cum Sol, Luna & terra in eadem linea rectæ ſunt; & in hoc non ſolum error dimidii horæ, ſed & dimidii minuti non ſentietur. Hinc &c.*

Omnis vis hujus argumenti in eo conſiſtit, quod non obſtante interpoſitione Lunæ cum viſa fuerit in (c) ſol non deſineret videri in *a* mediante radio, qui ab eo duodecim horis ante emanans, non potuiſſet impediri quin cœlum percurrat lunare ſemihora ante, cum luna tunc nondum directe interpoſita inter terram & ſolem. Aſt num Carteſius tam cito oblitus eſt, quod ſupponamus radios non ire recta linea? Luna per ſemihoram ante nondum inter ſolem & terram poſita erat; hoc veriſſimum eſt, illa tunc in *c* eſt, & ſol in *a*: non autem ideo verum eſt, lunam eo tem-

tempore non posse retinere radios quos per lineam curvam A E c venire supponimus, uti sola figura




ad oculum monstrat. Nihilominus non tam hoc Cartesio objicio, quin miror potius, eum non observasse, aut minimum dissimulasse, quod, quando in hac hypothesi dicimus, astra semper ibi apparere ubi sunt, motus eorum propius sit seponendus, quemadmodum supra annotavi; & hoc in casu, lumen uniformiter motum in linea spirali regulari, necessario apparere

faciet res in eclipſibus, ita uti revera apparent; quod optime demonſtrari poteſt. Si Carteſius ita ſenſui literali verborum ex epiſtola ipſius adductorum inhærens, tanquam ab adverſario profectorum, huic inſiſtat, & ſupponat, aſtra apparere præciſe in eodem puncto, ubi ſunt revera; ultra id, quod dixi, eum falli hoc argumento, ipſi regeri poteſt, non opus eſſe, ut ad ſecundam hanc partem recurrat, & ipſum per eclipſin lunarem idem probare potuiſſe, quod voluit probare per eclipſin ſolis; non vero neceſſum eſt hoc ut magis explicetur.

Concludit denique Carteſius epiſtolam ſuam hoc modo: *Non addam hic multa alia, quæ monſtrare poſſent, hanc ultimam aſſertionem aut propoſitionem abſurdiorem eſſe prima. v. g. hoc poſito, ſemper ad orientem in horizonte circulum nigrum conſpici debere inter terram & cœlum; & verſus occidentem Solem & ſtellas ſupra montes & multa alia ejus generis. Non etiam quæro, quænam ſi motus hic circularis luminis,* quod

*quod eodem tempore è diverſis aſtris egreditur, ducatur, ut ſemper inæqualitatem retineat, quæ eſt in velocitate aſtrorum unde egreditur &c. Nam ſi, quæ ſcripſi, non ſufficiant tibi convincendo, fateor, te planè invincibilem eſſe. Vale.* Hæc non nova abſurda ſunt, quæ Carteſius objicit, ſed novæ difficultates, quibus ſe ipſum implicat: non ſigillatim eas enodabo, quoniam ipſe eas modo enarrat. Non ſatis vero mirari poſſum, cum video conſtantiam quâ omnia ſcribit; imprimis, cum video non eſſe verba mentem præcurrentia; ſed epiſtolam ſeriam ſcriptam in otio, de re, quàm longè præmeditatus fuit, & poſt reiteratas diſceptationes. Mihi videtur non in ſola hac epiſtola Carteſium falli; credo me probare poſſe hoc ipſi in plurimis locis philoſophiæ accidiſſe. Forte & ego fallor, judices appello eorum quæ ſcripſi, omnes qui ea legere & examinare voluerint. Cum hæc materia pure geometrica ſit, & ego ab omnibus abſtinuerim, quæ in Phyſica diſceptari poſſint, facile determinari poterit, a quo paralo-

gismus admissus sit, & num ego ipse in errorem inciderim, dum ostendere volui Cartesium non solidè probare quæ demonstrasse se contendit.

*Finis Motus Localis.*



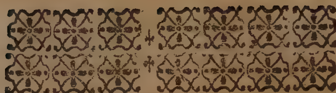
# *STATICA*

SIVE

# *SCIENTIA*

DE

# VIRIBUS MOVENTIBUS,



# PRÆFATIO.



*Ractatus hic est sequela Discursus de Motu Locali, jam ea mente publicati, ut integra haberetur Mechanica, & omnis scientia motus in ordinem redigeretur. Qui modum procedendi modernum norunt, in considerandæ natura & artium praxi, etiam commoda norunt, quæ in cognitione legum motus reperimus. Et sicut certum est, nihil in artibus absque usu mechanicæ fieri; ita sciendum etiam nihil in effectibus naturæ particularibus explicari posse, nisi demonstrationes hujus scientiæ ibi adhibeantur. Mechanica regulas præscribit Architecturæ utrique civili inquam, & Militari.*

*Hæc*

*Hæc naves exstruit & gubernat. Hæc machinas conficit, ad elevanda absque difficultate gravissima onera. Aquæ ductus normat, cursus ejus & saltus in molendinis & domibus voluptuariis procurat. Organa absque flatu animat, & canere facit solô aquarum casu. In speluncis artificialibus rupes loqui facit; ubi avium cantus imitatur, & dulcissimos concentus auribus nostris præbet. En partem eorum quæ facit ab arte humanâ in usum traducta, quid autem non facit a natura industria adhibitâ? Nonne ipsa terram immobilem firmat sub pedibus nostris, & omnibus corporibus locum præscribit, quem in toto mundo tenere debeant? Imo ipsa hæc est quæ Maris superficiem rotundam efficit, & ejus aquas filtrat (defecat) per ductus subterraneos, ut inde fon-*

*tes*

*tes & rivi oriantur; hæc nubes in medio aeris suspendet, eas in loca diversa detrudit ope ventorum, ex iis pluviam exprimit, ut agri fertiliores reddantur hæc corpora gravia descendere facit, cum duplici velocitate, & hâc de proportione quam Philosophi mirari satis nequeunt, hæc cœlos circumvolvit; & eosdem in motu hoc regulari servat; hæc aves in nube volare, pisces in aqua natare, & animalia in terrâ ambulare facit, hujus ope fit cordis pulsus, sanguinis circulatio, spirituum distributio, respiratio; hæc undiquaque lumen & sonos in gyrum agit quæ inflecti facit aut rumpit in echo, speculis & perspicillis. Verbo, sine ea neque in arte neque in natura quicquam fit; ita ut impossibile fit, in Naturæ consideratione, aut Artis praxi, sine remora progredi*

*gredi, absque cognitione & usu Mechanicæ.*

*Fatendum nihilominus, hanc tam pulchram, tam curiosam, tam necessariam scientiam, diu admodum neglectam esse. Aristoteles reverâ pulchrè hanc in rem meditatur; cogitationes vero ejusdem limitatæ sunt ad solas vires moventes, quas ad artem equestrem, ductum navium, consistentiam & motum animalium applicat. Quod ab Archimede habemus; propriè nihil aliud est, nisi demonstratio vectis & trutinæ & machinarum quarundam inde orientium. Hiero artificiales fontes & arcus sive balistas tractavit. Quod Vitruvius fecit, aliquantum latius patet: Sed præterquam quod non nisi minor Mechanicæ pars sit, dicendum, quod si volupe fuerit, omnes has parvas machinas movere; si etiam commodum*

*modum aliquod exin oritur, non magnum tamen inde proveniet adjumentum naturam cognoscendi. Videamus nihilominus, quò redeat omnis Veterum scientia: hoc in statu ad nos usque pervenit, cum non obstantibus tot commentariis & tot compilationibus, nemo per tot secula hunc laborem in se susceperit, ut ad novum eandem eveheret perfectionis gradum: donec ultimis hisce temporibus, tam felicibus in detegendis novis, vidimus quosdam, qui hanc artem excolere conati, vel potius, qui sibi composuere* SCIENTIAM *plane* NOVAM *de* MOTU. *Certè Gallilæus rectè Operi suo præmisit titulum* SCIENTIÆ NOVÆ, *quoniam inibi* DE ACCELERATIONE *ponderum tractavit, cadentium,* DE VELOCITATE *corporum in planis inclinatis, De* VIBRATIONIBUS *pendulorum, & de chordis*

*tensis;*

*tensis; de resistentia & fractura corporum, & multis aliis rebus, antea incognitis. Torricellus adhuc splendorem addidit inventionibus Galilæi, novis suis experimentis vacui, & pulchris argumentis de æquilibrio liquorum. Licet vero excellentes hi viri satis ingenii habuerint, ut invenirent novas scientias, non satis tamen felices fuere ultimam imponendi manum; fatendum enim, multa adhuc, deesse huic scientiæ, qualem nobis dedere, ut Mechanica plena inde fiat; non omnes materias tractat; non nisi experimentis multa probat, quæ ex principiis naturæ probanda; in plures tractatus distincta est, non cohærentes; imo defectus quosdam habet, notantur errores, qui certè veniam merentur in materia tam delicata, haud tamen inquietudine afficere cessant, summam*

*mam exactitudinem in argumentis physicis desiderantibus.*

*Vidimus deinceps Magnos viros feliciter laborasset ut excolerent & perfectam redderent hanc scientiam. Continua experimenta in diversis Europæ locis facta; Tractatus in lucem editi de legibus motus, resistentia corporum, vi percussionum æquilibrio liquorum, duritie, gravitate, & multis aliis rebus, certè opera sunt digna Autorum acumine, & seculi elegantiâ; Nondum tamen dicere possumus esse Mechanicam. Pulchre partes sunt, non tamen corpus conficiunt, quoniam a diversis Autoribus producta, diversa collimantibus, nec convenientibus, ut ad idem propositum concurrant, & ex diversis argumentantibus principiis.*

*Speravi semper Magnum opus Wallisii, tamdiu exspectatum*

*tum, omnia comprehensurum, quæ de hac re optari possunt; nec de eo amplius dubitabam, cum três magnos Tomos in 4to viderem, cum Titulo,* MECHANICÆ ET SCIENTIÆ MOTVS *Sed expertus sum, hoc excellens in se & admirandum opus, aptius esse satisfaciendis jam consummatis in hac scientia, quam informandis tyronibus. Præterquam enim quod minime omnia comprehendat, tam doctè & geometricè scriptum, ut à paucis intelligi possit.*

*Ergo plenum corpus Mechanicum conficere constitui, secundum optimam Pappi ideam, ubi colligere possem omnia quæ diversi Autores in hac materia invenere, cum eo quod ipse detegere potero, si tam felix fuero, ut quicquam novi invenire possim.*

*Totum opus in sex discursus divido, quorum primus jam ap-*

*paruit,*

*paruit, de Motu in genere tractans, de modô, quô producitur, quo conservatur, & communicari potest; de legibus percussionis, de regulis reflexionis, & plurimis similibus motus proprietatibus, considerati in statu libero ab omni alio impedimento. Secundus discursus est is, qui tractat hujusmodi motus qui cum violentia quadam fiunt, resistentiam aliunde obviam superantes. Præter demonstrationem omnium machinarum moventium, quarum vis vi libræ similis, ibi impossibilitatis motus perpetui ratio habetur; tractatur ibi de corporibus suspensis, vel unô vel ambobus terminis allegatis, de modo, quo rumpuntur, de figura, quam capiunt cum incurvantur; in specie vero ostenduntur, casus ubi funes tensi sunt Parabolici, Hyperbolici, Elliptici aut Circulares, Vires Turrium*

*&*

*& Pyramidum examinantur, loca debiliora ostenduntur; figuræ determinantur, illis adaptandæ quo perfectiores fiant, & æqualiter violentiæ ventorum resistant, Regulas generales damus resistentiæ corporum; medium indicamus has regulas generales casibus particularibus applicandi, qui Architecturam & reliquos naturæ Artisque effectus concernunt, & exemplo à navis motu petito ujus regularum mechanicarum notatur. In discursu hoc propositiones quædam sunt, quæ forsan aliquid negotii facessent geometricarum demonstrationum non assvetis; præteriri vero possunt, nec sunt absolutè necessariæ; nihilominus eas apponere volui, quoniam admodum utiles, & in sequentibus hujus Mechanicæ valde inserviunt rebus, quæ sine illis non resolvi possunt, determinandis.*

*Tertius discursus, est de motu corporum gravium; ubi absque novorum suppositione omnes hujus motus proprietates demonstrantur; sive proprio pondere descendant corpora, sive moveantur cum violentia propulsa. Ibi ratio ostenditur augmenti & diminutionis miræ velocitatis corporum, ascendendo & descendendo omnes, quos imaginari licet, lenitudinis gradus percurrentium. Galilaus non ostendit has proprietates, nisi supponendo definitionem, ipsi negatam. Balianus aliam progressionem motui horum corporum dare voluit. Hi duo autores suos habuere asseclas, & vidimus immensa volumina disputationum, quæ tamdiu fuere agitata inter Gassendum & Patrem Cazre, donec res a tribus magnis geometris confecta videretur; Hugenius & Pat. de Billy demon-*

*stra*

*strarunt progressionem Baliani esse impossibilem; Fermatus ostendit æternitate opus esse corpori, ut descendat in hac velocitatis proportione, saltim ab altitudine pedis. Omnes docti his demonstrationibus tam regularibus assentiebantur; Sed Pater Lalouvére, illustris ob magna inventa Geometrica, superveniens, Baliani progressionem non obstantibus demonstrationibus his cunctis, maxime possibilem & naturalem esse ostendit; modus etiam, quô illum defendit, tam pulcher visus, ut nec Fermatus ipse, quid regereret, invenerit Omnia hæc in hoc discursu explicata reperientur, monstrabiturque primam hanc gravitatem aut gradum istum celeritatis determinatum, quâ demonstratio Lalouveri pro fundamento utitur, subsistere non posse. Similis planè progressio, quam in motu bra-*

*brachii, pedis aut instrumentorum quæ tenemus, quando quidpiam ferimus, observamus, explicatur. Aliud adhuc progressionis genus ostenditur, in globis tormentariis obvium, aut sagittâ ex arcu emissa; motus in planis inclinatis examinatur, & hic propositio ista tantoperè prædicata demonstratur, de motu in Cycloide facto, quam & Hugenium demonstrasse novi.*

*Quartus discursus de motu corporum liquidorum agit; ubi demonstramus, nihil præsupponendo, omnia quæ in velocitate liquorum accidere videmus, item in vi pressionis ipsorum in directione & figura quam in saltibus, in decursu, & æquilibrio suo induunt. Sub nomine corporis liquidi comprehendimus aerem & omnia corpora, quæ non sunt dura; ita ut in tractatu hoc omnia ad* PNEUMATI-

CAM

CAM *spectantia reperiantur, vis elateris, rarefactio & condensatio, vis miranda pulveris compressius omnia denique de vacuo experimenta, & ratio omnium horum mirabilium effectuum ibi repertorum, hic videbuntur.*

*Quintus discursus est de motu VIBRATIONIS, i. e. omnium corporum motum reciprocum eundo & redeundo facientium, uti pendula, chordæ tensæ, elateres & plura alia corpora. Pendulum hic describitur, cujus vibrationes omnes æqualiter durant; demonstratur etiam omnes vibrationes in chorda tensa æqualiter durare; vibrationes duarum chordarum æqualis magnitudinis, & æqualiter tensarum, reciprocam rationem longitudinis chordarum habere, cum in pendulis saltim in proportione subdupla sint; in æqualibus chordis, vibrationes in pro-*

*portione subdupla esse respectu virium aut ponderum tendentium; vibrationes iterum in ratione subdupla esse ad spissitudinem funium ejusdem longitudinis, & æqualiter tensorum. Ita ut per causas omnia ea demonstrentur, quæ experientia nos observare docuit in sonis & harmonia chordarum tensarum.*

*Sextus Discursus est de motu UNDULATIONIS, ad exemplum circulorum in superficie aquæ orientium injectô, lapide. Similes Circuli considerantur in aere vel aliis subtilioribus substantiis formandi, quas manifestissima experientia ubique expensas esse docet. Et hic motus ille est, quem MOTUM UNDULATIONIS vocamus, qui lusui & delectationi infantium inserviens, subtilissimis Philosophis subjectum profundissimæ meditationis exhibere potest. Examinamus*

*namus ergo, quomodi circuli formari possint, & quomodo deinceps motus eorũ invicem communicetur, quæ sint lineæ directionis, quali vi prope aut in longinquum agere queant, quomodo reflectantur, quomodo refrangantur; supponentes deinceps, cum omnibus Philosophis, sonum hujusmodi motu aeris pro vehiculo uti, omnia ad sonum spectantia explicamus; & conjecturam facientes de propagatione luminis, examinamus annon etiam supponere possimus lumen simili motu pro vehiculô uti in aere subtiliori? Ostendimus etiam revera in hac hypothesi omnem luminis proprietatem & colorum modo quodam naturæ convenientissimo explicari, quæ absque eâ haud facile explicantur; spero etiam, me lectori satisfacturum, quando iis modum, quô mensura refractionum demonstratur, ostendam.*

*En finem & Propositum operis hujus, in quo præter magnum propositionum geometricarum numerum, quarum novitas doctis forsan accepta erit, ingens copia praxium curiosarum & utilium in omnibus artibus, reperitur, ut & multæ demonstrationes, quæ pulcherrimis Physicæ quæstionibus decidendis inservient. Quod artem attinet, gravissimæ ibi positæ observationes aquarum ductum concernentes; Molendina pneumatica describuntur, ad allevandam aquam conducentia, noctu dieque ad omnem ventum agitanda, ita ut tangi non debeant. Proportio ibi datur quantitatis pulveris tormentarii ad cuniculos & tormenta; Regulæ præscribuntur in jactu certo globorum majorum observandæ, quos Galli BOMBES vocant; longitudo determinatur, tormentis attribuenda, ut*

ut

*ut per longissimum spatium vim suam exerant; novæ machinæ delectationi aptæ describuntur; ut & perpetuum mobile. Quoad Physicam verò medium datur explicandi per leges Mechanicas systema Tychonis Brahe, quod plurimis Mathematicis impossibile visum. Impossibilitas motus atomorum Epicuri ostenditur. Ostenditur etiam motum cælorum non provenire posse ab ipsorum forma, i. e. motum hunc non procedere posse e principio interno & naturali, quemadmodum dicimus, corpora gravia ruere deorsum aut levia ferri sursum per principium internum & naturale. Proponitur Modus mechanicus duritiem corporum explicandi, & resistentiam quam, cum rumpuntur, monstrant; qui labor non adeo levis est, uti fortè imaginantur sibi nonnulli: Fluxus & refluxus maris, origo fontium, & plurima ejus generis, ad leges mechanicas revocantur. Lubens propositum meum articulatim proponere volui, ut judicium doctorum acquirerem, qui non majori beneficio me afficere poterunt, quam si indicaverint, quid corrigendum aut addendum judicent.*



# STATICA
## VEL
# SCIENTIA
## De
# Viribus Moventibus.

I.

*Vires contrariæ in ponderibus*

Ccidit ſæpe corpora ita inter ſe ligata eſſe, ut unum ſine altero moveri nequeat; quandoque ſi unum ſe movere nititur contra alia, ſe impediunt invicem, ſi vires eorum æquales ſunt, ſin minus, fortius prævalet, & debilius obligat ut moveatur contra propriam inclinationem. Ita in bilance videmus, pondus unum deſcendere non poſſe, niſi alterum attollatur; & ſi æque gravia ſunt, ambo in æquilibrio manent, cum utrumque deſcendere nititur ob gravitatem ſuam; ſin minus, majus obligat minus, ut contra naturam & inclinationem corporum gravium aſcendat.

II. Si

II. Si loco duorum ponderum æqualium in duabus trutinæ lancibus reponendorum non nisi unum reponatur in lance una & alteram homo manu apprehendat deorsumque trahat, fieri posset, ut homo hic ita vim temperet attrahentem, ut pondus oppositum sustineat; nec tamen illud amplius ascendere faciat, aut descendere permittat; hoc casu concipimus vim manus hujus æqualem viribus ponderis esse. Et si jam loco ejusdem ponderis, aliam manum ab altera parte trahere supponamus, eadem vi, qua pondus; tunc speciem æquilibrii inter duas manus concipimus, quæ cum æquali vi utrinque trahant, neutra alteram superare potest, consequenter immobiles manent ambæ. *Et aliis corporibus.*

III De his igitur viribus, ad movenda corpora necessariis non obstante resistentiâ virium contrariarum, quæ ab altera parte motum hunc impedire conantur; de his inquam viribus jam agendum nobis, hancque scientiam *Staticam* appellamus, quæ non solum viribus illis convenit quæ in corporibus gravibus offenduntur, sed & omni nisui quem in quocunque corpore nobis conci- *Subjectum staticæ sunt.*]

 pere.

pere. Verum est, quod cum nulla vis sit, quæ non aliquo modo per vim ponderum explicari possit, ordinarie exemplum corporum gravium adhiberi, ut intelligatur quid in genere omnibus trahentibus aut moventibus conveniat viribus. Et ita leges Staticæ explicamus, ita ut sub vocabulo ponderis, æquilibrii & omnis ejus quod ponderi corporum simile, in genere intelligere possimus corpora quæ pollent vi movendi, quæ se invicem impediunt aut superant.

*Centrum grabitatis.* IV. *Centrum grabitatis* aut ponderis corporis cujusdam est punctum, ex quo si suspendatur corpus, in æquilibrio manet. Si filum extremo baculi cujusdam longi alligetur, isque suspendatur, manifestum satis est, baculum inclinari; ast si filum medio baculi alligetur, & suspendatur, facile observabimus baculum non magis in unum quam alterum inclinari latus, sed in æquilibrio manere, si dimidiæ baculi partes æquali gravitate fuerint prædictæ. Et hoc medium gravitatis, unde baculus suspensus in æqulibrio manet, centrum est gravitatis baculi.

*Ubi sit in corpore regulari.* V. Si baculus plane uniformis esset, & perfectum cylindrum exhiberet, æque

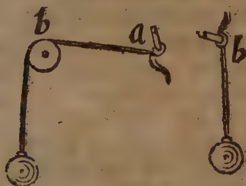
æque ſpiſſum in uno extremo ac in altero;&adhæc e materia quadam factus cujus partes æque magnæ ſunt æque graves; tunc centrum gravitatis idem cum centro figuræ baculi erit; hoc eſt, ſi punctum medium totius baculi capias, in eodem puncto & centrum gravitatis habebis; quoniam patet illud, ſi in hoc puncto ſuſpendatur, in æquilibrio manſurum, cum æqualis gravitas utrinque ſit, eadem ratione applicata, ſicut æqualis quantitas adeſt materiæ.

VI. Si vero baculus e diverſa conſtaret materia, cujus partes æque magnæ non ſunt æque graves, v. g. pars dimidia ex ebeno, ligno admodum gravi, altera e pino multo leviori; tunc centrum gravitatis non erit in medio baculi, quoniam dimidium ex ebeno cum ſit gravius multo, ſuperaret alterum e pino, multo levius; ut igitur centrum reperiatur, in dimidium ex ebeno progrediendum. *Et in irregulari.*

VII. Corpora e tam diverſa quoad pondus materia conpoſita, heterogenea appellantur, & quæ uniformem ſaltim continent, & ubique æque gravem, homogenea dicuntur. *Corpora homogenea & heterogenea.*

*Linea dire-ctionis.*

VIII. *Linea directionis* eſt linea per quam tractio fit. Uti ſi pondus *c*, ſuſpenſum ope fili *c b*, gravitate ſua trahit clavum *b*, cui filum alligatum, linea directionis ea erit quam imaginari nobis poſſumus, clavum tranſientem, & directe deorſum tendentem, qualis eſt idem filum *b c*, quoniam revera pondus tunc in recta linea deorſum trahit ſecundum hanc lineam. Si vero filum duceretur




ſupra trochleam *b*, & clavum attingat, *a* a latere poſitum; tunc linea directionis reſpectu clavi *a*, erit linea *a b*, quæ ad latera tendet, non deorſum; quoniam revera clavus ad latus trahitur, non deorſum.

*Centrum gravium*

IX. Sicut obſervamus corpora gravia ſemper recta linea ad centrum terræ cadere, quando libere cadunt; ita quoque dicimus centrum terræ eſſe *centrum gravium*, h. e. punctum ad quod omnia gravia,

via tendunt corpora. Ut ita bene diſtinguendum *centrum* gravitatis a *centro gravium* aut corporum gravium.

X. Quoniam lineæ directionis diverſorum corporum ſuſpenſorum directe ad centrum gravium tendunt, i. e. ad medium terræ, omnes hæ lineæ ſe interſecant in hoc puncto, conſequenter nec inter ſe parallelæ ſunt, rigoroſe loquendo; paradoxon quoque veriſſimum eſt, duos muros oppoſitos conclavis cujusdam ſpiſſiores eſſe & longius a ſe diſtare in ſuperiori parte quam in inferiore, ſi prorſus complanati fuerint, & ad normam regulamque exſtructi. Hoc in rigore mathematico verum, ſed differentia multo minor eſt, quam ut ſenſu percipi poſſit; ita ut reſpectu ejus, quod ſub ſenſus cadit, dicere poſſimus muros eſſe parallelos, & ubique æque ſpiſſos. Et ita etiam ſupponere poſſumus, omnes lineas directionis corporum ſuſpenſorum, parallelas inter ſe eſſe.

*Linea directionis corporum ſuſpenſorum parallela cenſentur.*

XI. Regula generalis eſt, corpora gravia ſemper in tantum deſcendere quantum poſſunt; h. e. ſemper infimum locum petere, quo pertingere poſſunt, ſi non impediantur ab alio corpore quod ſe deſcenſui ipſorum

*Corpora ſemper deſcendunt, ſi poſſunt.*

oppo-

opponit. Si igitur globum fastigio tecti imponas, deorsum volvetur, si potest, nec obstaculum invenit, quod ipsum retinet; cum enim gravitas ejus semper eum deorsum trahat, ipsum hoc casu eo tendere necesse est.

*Etiam in plano inclinato.*

XII. Idem dicendum de corpore æquo & complanato, tecto cuidam imposito, aut plano inclinato; complanatum enim hoc corpus nihil obstaculi inveniens, ad infima decurret, cum uniformitas superficierum nullatenus impediat delapsum.

*Corpus immotum manet, cum moveri nequit absque ascensu centri gravitatis.*

XIII. Cum dicitur corpus descendere quia magis deorsum ferri potest, hoc intelligendum est respectu centri gravitatis; hoc enim centrum omnia moderatur, cum in hoc puncto principalis descensus vis sita, sit. Ita ut, si corpus moveri debet, centrum gravitatis descendere posse, necessum sit, alias non movebitur. Ita si corpus *g b e d*, primæ figuræ, tabulæ imponatur, imaginari nobis facile possumus





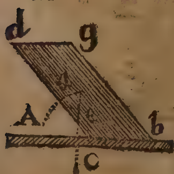


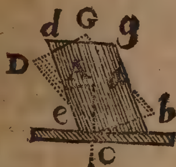
idem

idem versus D inclinari & prolapsurum, quoniam vero hoc fieri nequit quin centrum gravitatis *a* tollatur ad *A*, corpus in hoc situ manere cogitur absque motu.

Unde videmus, necesse esse ad immobilitatem corporis tabulæ impositi, aut alii fulcro, ut centrum gravitatis descendere nequeat; & ad hoc sufficit, si corpus, quod illud sustinet, non inclinatum est, ut linea directionis, h. e. linea e centro gravitatis versus centrum graviũ tendens, in aliquam partem baseos corporis cadat. Et e contrario, si linea hæc extra basin corporis cadit, corpus hoc sine dubio titubabit. Sic corpus *a* in secunda fig. cadat necesse est, quoniam cum centrum gravitatis in *a* existat & linea directionis *dc* cadat extra basin *e b*, totum corpus *a* versus *A* inclinari potest, ita ut, dum angulo *e* semper insistit, *Et cum linea directionis basin transit.*

2



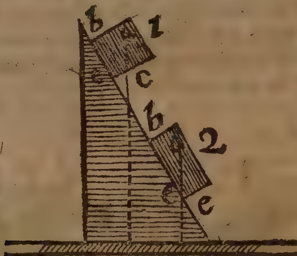




cen-

centrum *a* moveatur verſus *A*, circuli partem deſcribens, cujus centrum *e*; & ſicut facile videmus, centrum gravitatis *a* depreſſius fore in *A*, ut demonſtratione ulteriori non indigeat; ita dicendum eſt etiam totum corpus titubaturum. In prima vero figura manebit immotum, quoniam linea directionis *a e* intra baſin corporis hujus *b e* cadente, idem corpus titubare nequit, neque ex una, neque ex altera parte, v. g. verſus *D*, quin & centrum *a* moveatur in A.

*Quænam corpora repant, quænam rotentur, in plano inclinato?*

XV. Videmus adhuc, ſi tabula corpus ſuſtinens, inclinatur, corpora hæc rotari quandoque deſcendendo, & quandoque repere.




Si enim linea directionis *a c* extra baſin *e b* cadit, (in prima figura) corpus rotabitur; ſi vero intra eam, uti

uti in secunda figura, corpus repet; id quod ad oculum patet.

XVI. Hac ratione globus plano cuidam impositus, semper rotari debet, donec ad certum pervenerit punctum ubi quietus esse possit. *Globulus super plano.*




Imaginetur nobis planum *b g*, supra terram *d*, & ducatur a centro gravium *d* perpendicularis *d c a*, versus planum *b g*; & videbimus globum ibi bene consistere posse, quoniam linea directionis *a c d* percurret punctum c, cui globus innititur. In quovis vero alio loco uti in *e* vel in *f*, globus descendere & versus *a* rotari poterit, quoniam tunc linea directionis *e d* aut *f d*, extra punctum fulciens *g* aut *b* cadet. Ita videmus veritatem paradoxorum, neminem in plano ambulare posse, quin vel ascendat vel descendat; hominem semper ad eundem locum meantem

in

inambulacro plano, quandoque descendere, quandoque ascendere; & in tantum procedere posse, ut tandem repere cogatur, nec amplius stare possit.

*Corpus tanto firmius sustinetur, quanto basis est latior.*

XVII. Videmus præterea, quanto latior basis corporis, tanto firmius ipsum corpus fore, & immotum persistiturum. Ut enim corpora cadant, movenda sunt, ita ut linea directionis extra basin cadat, & tunc proprio pondere cadent. Patet autem plus laboris requiri, ut demoveatur linea hæc extra basin, si lata admodum, quam si angusta admodum.

*Acus in cuspide sua stare nequit.*

XVIII. Licet ergo stricte loquendo, acus erecta stare possit, posita in cuspide supra tabulam marmoream, nihilominus impossibile est eam ibi manere immotam, quoniam cuspide solum quæ ferme invisibilis, insistens, minima vi dimoveri potest linea directionis extra basin tam exiguam, si semel inibi existeret.

*Ob perpetuam aeris agitationem.*

XIX. Et quoniam aer perpetuo agitatur, agitatio hæc plus satis sufficiet ad movendam & dejiciendam acum.

*Quædam corpora grandia*

XX. Non ergo mirum videatur, turres quosdam per aliquot secula con-

consistere, licet inclinati sint versus alterum latus, & ruinam minentur; quoniam turres isti hoc artificio extructi esse poterunt, aut hoc forte fortuna venire potuit, ut centrum totius operis magnorum horum corporum directe a basi sua sustentetur. Nec mirum prodigiosum Obeliscum Romæ immotum manere in basi sua, licet non nisi proprio pondere partes cohæreant, quamvis enim basis admodum parva est ad altitudinem relata, massa tamen hæc tam inepta, & tam enormis ponderis est, ut nulla vis venti tam fortis sit, quæ sufficienter eam movere, aut lineam directionis extra basin dimovere possit.

*non corruunt, licet inclinentur aut super exigua basi existant.*

XXI Lex hæc mechanica jam explicata, exacte observatur in omnibus Naturæ effectibus; aliquid vero mirandi inest modo, quo animalia utuntur, ut se sustineant & a lapsu conservent, de quo alibi dicemum. Interim in genere notandum, omne animal, in quocunque situ fuerit, ita dispositum esse, ut linea directionis intra pedes aut manus constituatur, quibus sustinetur; & si Pictores & sculptores hanc regulam non curant, ridendos se præbent, &

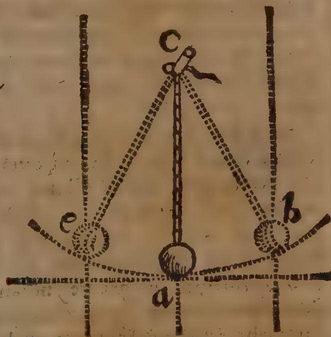
*Leges Mechanicæ ab animalibus & pictoribus observatæ.*

ani-

animalibus situm dant quem habere nequeunt.

*Quando corpora suspensa in quiete maneant.*

XXII. Corpora suspensa, quieta manent, dum linea directionis transit punctum cui appensa; & si inde dimoveantur, ipsa illuc per pondus proprium reducuntur. V. g. si corpus *a* suspensum ex clavo *c*, manebit in *c a* quoniam linea directionis est *c a*; si vero versus *e* aut versus *b* trahatur, descendere poterit in *a*; quoniam patet, in arcu *e a b*, in quo




corpus suspensum moveretur, punctum infimum esse *a*, & consequenter corpus descendere versus punctum hoc.

XXIII.

XXIII. Cogitandum, corpus per ſe non mutare gravitatem, dum mutat figuram aut ſitum, Ita maſſa plumbi pondo æquans, cum rotunda eſt etiam pondo æquabit, licet quadrata ſit & vel in meridiem vel orientem vergat; ſique maſſa hæc plumbi ſtateri imponatur, ſemper idem reperietur pondus. Imo, vis quam adhiberet libere ſuſpenſa ex clavo quodam ope fili, eadem ſemper foret, quamcunque figuram & ſitum haberet.

*Corpus gravitatem non mutat, licet ſitum aut figuram mutet.*

XXIV. Poſtquam pondus ex clavo ope fili ſuſpenſum & quietum vidimus, concipiamus jam filum hoc rigeſcere & unum inflexile corpus cum pondere conſtituere, vis, qua clavus trahitur, propterea nequaquam mutabitur; quoniam manifeſtum eſt, flexibilitatem vel rigorem fili nihil hic conferre.

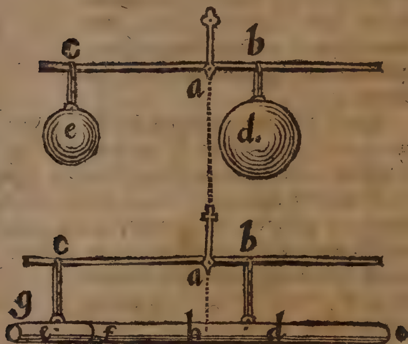
*Corpus ope fili vel virga rigidæ ſuſpenſum æqualiter trahit.*

*En jam maxime arduam Staticæ propoſitionem*

XXV. Pondera duo ſuſpenſa e duobus extremis libræ, in æquilibrio manent, dummodo brachia Libræ, quibus pondera appenſa, in ratione reciproca ponderum fuerint. Mentem meam clarius aperiam. Imaginemur, nobis baculum *b c* (1. fig. pag. ſeq.) qui anſam aut filum in medio

*Propoſitio Statica fundamentalis.*

dio *a* habeat quo teneri & inſtar libræ ſuſpendi poſſit; ſint præterea duo pondera, *d* & *e* appenſa per puncta *b* & *c*, ita ut pondus *d*, ad pondus *e* ſit reciproce, ut longitudo *a c* ad longitudinem *a b*; h. e. ſi pondus *d* eſt duplum ponderis *e*, longitudo *a c* ſit etiam dupla longitu-




dinis *a b*; aut ſi pondus *d* eſt triplum ponderis *e* longitudo *a c*; ſit etiam tripla longitudinis *a b*; aut denique, ut, quamcunque pondus *d* habeat rationem ad *e*, eandem longitudo *a c*, habeat ad longitudinem *a b*; dico pondera *d* & *e* in æquilibrio fore.

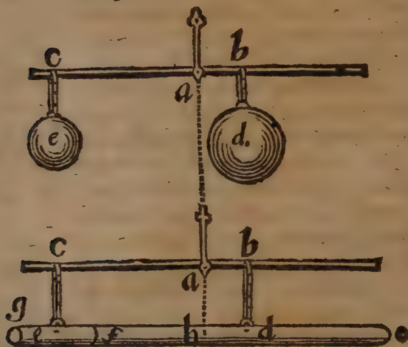
XXVI.

XXVI. Ad demonſtrandam hanc propoſitionem imaginari nobis poſſumus, pondera *d* & *e*, mutare figuram, & ambo oblonga evadere, ita ut totum pondus *d* ſit extenſum in figura *o f* (fig. 2.) duplò longiori quam *a c*, quo ſemper in *b* ſuſpenſum maneat & dimidium ipſius *d f*, ſit æquale *a c*. Eadem ratione pondus *e* longius reddatur in figura *g f*, duplo longiori, quam *a b*, ita ut ſemper in eodem puncto *c* ſuſpenſum maneat, & dimidium *e f* ſit æquale *a b* Hæc duo pondera ſic longiora reddita ſe tangent in *f*, quoniam dimidia *e f* & *d f* ſimul ſunt æqualia ambobus brachiis Libræ *a b*, *a c*: h. e. toti longitudini *b c*, aut *d e*, quæ eſt æqualis ipſi *b c*, quoniam hic ſuppono *d e* parallelam eſſe *b c*; & alioquin lineas *b d* & *c e* etiam parallelas haberi (10). *Demonſtratio.*

XXVII. Cæterum, ſicut ſupponere poſſumus duo hæc pondera conſtare ex materia homogenea cujus partes æque magnæ ſunt æque graves, neceſſe eſt, ut ita longiora reddita, ſint ejusdem ſpiſſitudinis, & ambo priſma conſtituant, vel baculum prorſus uniformem. Quoniam enim omne pondus *o f*, eſt ad omne pondus *f g*. uti *a c* ad *a b* per hypotheſin aut uti longitudo *c f*; (dupla ipſius *Demonſtratio.*

F *a c*)

*ac*) ad longitudinem *fg*, (duplam ipsius a b;) sequitur secundum regulas geometricas de solidis, spissitudinem duorum prismatum istorum æqualem esse; quoniam regula generalis est, prismata ejusdem crassitiei, inter se esse uti eorum longitudines.




item prismata, quæ inter se sunt uti longitudines eorum, esse ejusdem crassitiei. Igitur duo prismata *ef*, *fg*, cum sint inter se sicut longitudines *of*, *fg*; necessario ejusdem sunt crassitiei, & ita prisma totale vel baculum uniformem faciunt.

*Demonstratio.* XXVIII. Considerando jam prisma hoc totale, ut pondus unicum & con-

continuum, reperiemus, ipſius centrum gravitatis debere eſſe in *b*, quod ſuppono punctum medium totius corporis, *o g* (5) Jam punctum hoc *b*, perpendiculariter imminet puncto *a*, quoniam enim tota longitudo *o g*, dupla ipſius *b c*, dimidiū ejus *o b* erit æquale eidem *b c*, & quoniam *o d*, æqualis ipſi *a c* neceſſe etiam *d h*, eſſe æqualem ipſi *a b*, ita cum *d* cadat ſub *b h* cadet etiam ſub *a*.

XXIX. Imaginemur jam nobis omne filum rigeſcere, & conſideremus *o d b e o g* ut corpus unicum & inflexile, ita tamen ut tota Libra *b c* & fila rigida ſine omni gravitate conſiderentur; videbimus totum hoc corpus ſuſpenſum ex *a* in quiete manere, quoniam linea directionis *a b* per centrum gravitatis *b* & punctum ſuſpenſionis *a* tranſit. (22) Filis ergo mollioribus factis & flexilibus, totum in quiete manebit ut ante; (24) immo tunc adhuc quieſcet, ſi concipiamus corpus diviſum in f, quia tum pondus *f g*, in eodem ſitu manebit, utpote ſuſpenſum in medio ſui & centro gravitatis *e*, tum corpus *o f*, ceu ſemper in centro gravitatis *d* ſuſpenſum. Ergo ſi tandem imaginemur nobis pondera hæc *o f*, *f g* abbreviari *Demonſtratio.*

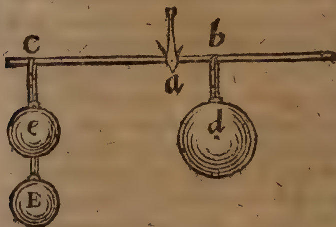
& ad priorem figuram redire (fig. 1.) etiam tum in quiete manebunt, quoniam quodlibet eorum semper eodem puncto Libræ *b*, aut *c* appensum, a suo latere eodem modo trahit, qualicunque figura fuerit præditum; (23) Et consequenter hæc duo corpora ita in quiete posita, sunt in æquilibrio, quod E. D.

*Nota ad demonstrationem Archimedis.*

XXX. Qui norunt quid in hac materia dicant interpretes & Commentatores Archimedis, animadvertent, in adducta demonstratione omnes difficultates evitari, quibus subjacet ordinaria demonstratio.

*Longitudo filorum, e quibus pondera dependent, nihil*

XXXI. Plura adhuc circa eandem notari possunt, quale est illud, nihil referre, num pondera appendantur filis longioribus, num bre-

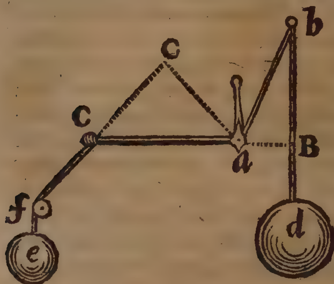



vioribus; manifestum enim, si pondus *e* appensum filo *c e*, est in æquilibrio

librio cum pondere *d*, idem quoque illi æquilibre futurum, si sit appensum filo *c E*. Licet enim quædam dubitandi ansa adsit, num corpora graviora sint, si propinquiora terræ; nihilominus, præterquam quod differentia hæc, quæ invenitur in parvis hisce filis, est insensibilis, supponimus idem pondus (& non solum idem corpus) applicatum antea in *e*, jam applicari in *E*; & in hoc casu patet, quod eadem vi tracturum sit punctum *c*. *hil refert.*

XXXII. Notandum adhuc, brachium Libræ, unde pondus suspendi censemus, ad perpendiculum insistere debere lineæ directionis. V. g. si brachium Libræ *b a* retractum est, concipienda venit linea horizontalis *a B*, quæ perpendicularis cadit in lineam directionis *b d* in *B*, & tunc pondus *d* censebitur suspensum in puncto *B*, & brachium solummodo erit *B a*. Similiter si pondus *e* paululum ad latus trahit ope trochleæ *f*, continuatur linea *f c C*, & ducitur *a C* perpendicularis, brachiumque Libræ erit *a C*, & non *a c*. Ita ut longitudo brachii sumenda a centro bilancis usque ad locum ubi perpendicularis lineam directionis ponderis secat. V. gr. hic *Quomodo longitudo brachiorum libræ determinanda?*

longitudines brachiorum sunt *a B* &

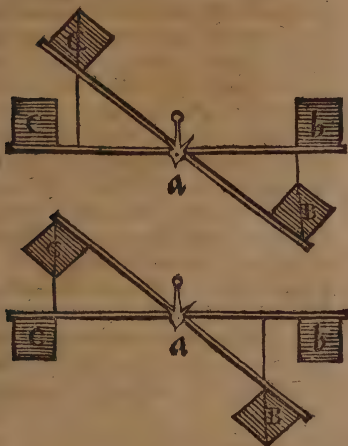



*aC.* & non *a b* & *a c*; sic pondera *d* & *e* erunt uti *a C* & *a B.*

*Casus ubi libra ipsa æquilibrio sese restituit.*

XXXIII. Notandum præterea, quod si pondera Libræ imposita in æquilibrio sunt; quamprimum paululum Libram versus alterum latus inclinaveris, pondus ejusdem lateris prævaliturum & effecturum sit, ut statera plane vacillet; quoniam in situ obliquo Libræ, linea directionis B longius ab *a* recedet, & linea C. propius ad idem *a* accedet. E contrario si pondera inferne affixa; licet libram aliquantum inclines, statim tamen in situm horizontalem revertetur, quoniam in situ obliquo Libræ, linea directionis B propius ad *a* accedit, & linea C. longius recedit; sic C, prævalet.

XXXIV.




XXXIV. Videmus quoque Libras fallaces variis modis construi posse. Si enim brachia earum inæqualis longitudinis sunt, duæ lances, quæ in æquilibrio sunt vacuæ, etiam in æquilibrio manere possunt, positis in iis ponderibus inæqualibus. Sic si ducatum justo leviorem lanci imponas, longiori brachio appensæ, credes justi ponderis eam esse; sed fallacia hæc evitatur, si situs immutatur & ducatus in altera lance, in qua *Libræ fallaces.*

antea reponebatur pondus, & deponitur pondus in ea, in qua antea erat ducatus. Item si lances filamentis alligentur, quorum extrema aliquantum infra centrum lancis sunt, in æquilibrio manere videbuntur, licet plus ponderis ab uno quam altero latere esse possit.

*Leges æquilibrii observata in animalibus.*

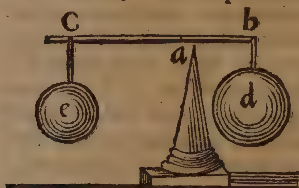
XXXV. Notanda denique miranda Naturæ industria, & usus regularum æquilibrii, qui est in compositione corporis animalium, in eorum consistentia & motu; ita enim corpora animalium composuit, ut, cum pedes centri Libræ vices gerant, aut fulcri vectis, ab omni latere pondus adsit æquale. Hinc omnium partium geminarum una ab uno latere, altera ab altero æqualiter a medio distat, sicut brachia, aures, oculi renes; & partes simplices sunt in medio, sicut nares, os, mentum; si vero non sunt in medio, alia ab altero latere pars adest, contrarium pondus addens, sicut fel & lien, cor & pulmones, Sic quoque si ab anteriori parte partes adsunt extreme graves etiam a posteriori aderunt contrapondium sistentes; De qua materia Galenus pulchram animadversionem habet Præterea Natura animalia ita fecit, ut in omni-

omnibus ſitubus æquilibrium habeant, ſemper æqualiter diſtributo utrinque pondere corporis. Sic magno ventre præditi retrorſum inclinantur; contra gibboſi aut ſarcinam dorſo impoſitam geſtantes, antrorſum incurvantur. Si quid a terra ſublaturi inclinamur, reponimus pedem, aut ad minimum podicem totum; nam alias caderemus, cum plus ponderis in anterioribus adeſſet. Inde eſt ut nihil e terra tollere poſſimus, quod ante nos poſitum, ſi calces conjunctim muro apponantur. Sic ſi titubamus & lapſuri verſus alterum latus inclinamur, ſtatim brachium aut tibiam ex altero latere extendimus, ut, pes aut brachium a baſi ſ. linea directionis hac ratione recedens, plus valeat ad retinendum reliquum corporis in æquilibrio. Hoc æquilibrium etiam in avibus apparet volantibus, alæ enim eorum, quæ ſunt inſtar fulcri & centri, ab utroque latere æquale ſemper addunt pondus. Sic Aves longo collo gaudentes, etiam longos habent pedes, quos volando retrorſum extendunt, ſicut Ciconiæ. Si aves in altum ſe levare volunt, alas protrahunt verſus caput, eum in finem, ut cum

plus ponderis adſit verſus caudam, caput paululum elevetur, & in altum dirigatur, quo motus fieri debet. Contra ſi deſcendere volunt, retrahunt alas retrorſum, ut, capite inclinato deorſum, omnis motus eo tendat. Multæ aliæ ejus generis reflexiones adſunt, quas quilibet ſibi facile facere poteſt, non ſine delectatione, modo paululum attentus ſit.

*Vectis ſive libra fulcita.*

XXXVI. Idem appareret effectus in libra, ſi non ſuſpenderetur,




ſed fulciretur in cuſpide quadam, ubi





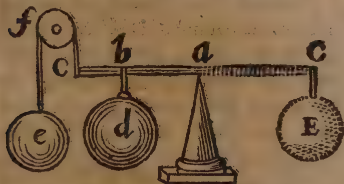


libere

libere titubare potest, & tunc rectius vectis vocaretur, quam Libra.

XXXVII. Inde ratio dari potest de vi forficum, forcipum & similium machinarum. Sunt enim totidem vectes, vel potius in unoquoque instrumentorum istorum adest par vectium, cujus centrum est clavus *a*, eosdem conjungens, & sicut brachia quæ manu tenemus, h. e. *a c*, *a c* longiores sunt falculis *a b*, *a b*, ita vis brachiis applicata, magni est effectus. *Vires forficum & forcipum.*

XXXVIII. Vectis fulcrum suum in extremitate habere potest, v. g. imaginemur nobis perticam *c a* fulcitam extremo suo, *a*, ab altero extremo pendeat funis qui trochleam transiens, *f*, sit alligatus ponderi *e*, quod punctum *c* perticæ, attollere nitetur; in alio puncto *b* ejusdem perticæ, sit suspensum pondus *d* *Vectis in extremitate fulcrum habens.*




quod idem punctum *b* in pertica detrudere nitetur. En duos con-

trarios nisus. Si duo hi nisus in æquilibrio manent, ita ut unus non superet alterum, erunt in ratione reciproca distantiarum, i. e. sicut longitudo *c a* se habet ad longitudinem *b a*, ita erit pondus *d* ad pondus *e*. Si enim imaginemur perticam in C productam, ita ut *a C* sit æqualis *a c*; & supponamus pondus E æquale ponderi *e*, sit suspensum in C; pondus hoc E tantundem allaborabit, ut dejiciat punctum C & consequenter ad attollendum punctum *c*, quantum pondus *e*, ad attollendum punctum *c*. Ita loco applicationis ponderis *e* in *c*, applicari potest in C, ubi manebit in æquilibrio cum pondere *d*; & consequenter (25.) cum eo erit in proportione reciproca distantiarum, *a C*, *a b*.

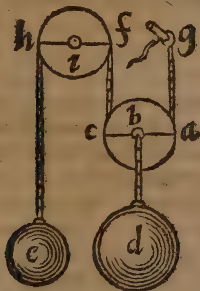
*Vis certi generis cultri.* XXXIX. Sic videmus vim hujusmodi cultrorum, qui ab uno termino sunt alligati, ut in fig. seq. Frustum enim si applicatum in *b* prope terminum *a*, vis manus in *c* tanto majoris erit effe-




ctus

ctus, quanto longius distabit ab *a*, quàm *b*. Eodem modo videmus januam premere magna vi illud quod propè cardines; & si duo homines connitantur, alter ut aperiat, alter ut claudat januam, habilitas eorum in eo consistet, ut tantum a cardine distent, quantum poterunt. Videmus insuper fortius nos mordère dentibus interioribus maxillæ, quam anterioribus; quoniam maxillæ moventur quasi circa centrum quoddam, quod est versus fundum maxillarum.

XL. Alligetur funis clavo fixo *g*, & transeat supra trochleam *a c*, deinceps iterum supra trochleam fixam *f h*; sintque duo pondera *d* & *e* appensa, unum in centro trochleæ, *b*, *De Trochleis.*



alterum in extremitate funis; hæc duo pondera nituntur contra se invicem; & si sunt in æquilibrio, pondus *d* erit duplum ponderis *e*. Considerandа enim trochlea *a c*, instar vectis fulciti in extremo *a*; & revera, loco trochleæ imaginemur perticam *a c*, alligatam extremitate sua *a* funi *g a*; deinceps alius funis alligetur alteri extremo, *c*, quo attrahamus in altum, sive immediate per manum, sive ope trochleæ *f b*, & ponderis *e* si jam pondus *d* appendatur medio perticæ, liquet, (38.) vim applicatam in *c* adæquantem vim applicatam in *b* non nisi dimidium esse ipsius *d*. Nihil jam refert, num vectis *a c* sit pertica lata an arcta, rotunda an quadrata, potest ergo instrumentum esse rotundum instar trochleæ; Nihil quoque refert, num funis sit alligatus in *a*, aut replicatus inferne, ut assurgat per *c* versus *f*; ita trochlea hæc est vectis, cujus fulcrum in latere *a*. Quod trochleam *f*, attinet ea nec auget nec diminuit vim; quoniam supponimus eam esse alligatam per centrum suum *i*, circa quod volvitur. Ita est ergo libra duo brachia æqualia habens, *i f*, & *i b*, ita ut vis applicata

in

in *b* per pondus *e* ut trahat deorſum punctum *b*, eundem habitura ſit effectum ac ſi in *f*, applicaretur ad attollendum punctum *f*.

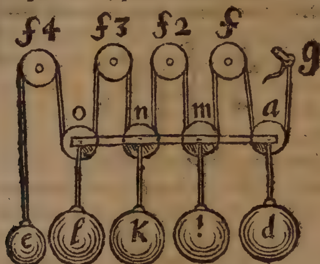
XLI. Sic funis alligatus una ex- *Æquilibrium in trochlea.*




tremitate clavo *g*; & altera clavo *f* 2, tranſiens tres trochleas *a*, *f*. *m*. quarum *f* habeat claviculum fixum; reliquæ duæ fulciantur fune. Sint porro duo pondera *d* & *i* æqualia, ſuſpenſa per duas trochleas *a* & *m*; dico hæc duo pondera fore in æquilibrio, & minimam vim ſufficere ad alterum attollendum trahendo alterum deorſum, id quod oppido liquet. Idem accideret, ſi major numerus trochlearum adeſſet, *a*, *m*, *n*, *o*, &c. ſuſpenſarum eodem fune, qui recurreret per totidem trochleas *f*, *f* 2, *f* 3, *f* 4, &c. quæ claviculos fixos haberent; tunc enim omnia pondera *d*, *l*, *k*, *i*, &c. ſibi invicem æqualia, in æquilibrio erunt,

erunt & minima vis ea ascendere aut descendere faciet.

*De trochleis multiplicatis.* XLII. Si in extremo funis alligetur pondus *e*, quod tantum dimidium




sit unius ponderum *l*, *k*, &c. hoc pondus *e* solum tenebit in æquilibrio omnia reliqua pondera *l*, *k*, *i*, *d*, quantus etiam eorum numerus. Si enim funis firmiter alligatus in *f* 3 esset in æquilibrio cum *l*; (40) sed *k* & *l* secundum prædicta in æquilibrio existentia, æqualiter trahunt utrinque ut vertant trochleam *f*, quodlibet in suam partem. Hinc cum vis eorum æqualis est, trochlea immobilis manet, ac si firmiter alligata esset; Ita ut funis *o*, *f* 3, possit putari firmiter alligatus in *f* 3, vera enim reliqua pondera *k*, *i*, *d*, non magis eam agitant trahendo, ac si troch-

trochleæ earum planè immobiles essent, & funes in *f* 3, *f* 2, &c. alligati. Jam si funes isti ita alligati essent, pondus *e*, esset in æquilibrio cum pondere *l*, (40) sicut est, licet funis liberè transeat super trochleas f 3, f 2, &c. sic minima vis detrudens *e* deorsum, sufficeret ad *l* attollendum.

XLIII. Cogitemus jam omnia hæc pondera *l*, *k*, *i*, *d*, tam inter se connexa esse, ut, quamprimum unum attollitur, reliqua quoque attollantur; quod intelligi potest si imaginamur nobis, trochleas esse ligatas ope perticæ transversæ; aut capsulæ inclusas. Tunc enim non majori labore opus erit ad levanda omnia hæc pondera, quam ad levandum primum, quoniam omnia in æquilibrio existentia nec ascensui nec descensui resistunt, uti monstravimus (41) Ita si supponimus, *e* habere vim attollendi primum pondus *l*, eo in casu quo hoc pondus *l*, solum fit, aut omnes hæ trochleæ *f* immobiles eandem etiam haberet ad attollenda omnia reliqua pondera k, *i*, *d*, quoniam hæc pro nihilo putantur utpote nullâ ratione resistentia; ita ut omnes hæ trochleæ, *o*, *n*, *m*, *a*, capsulæ

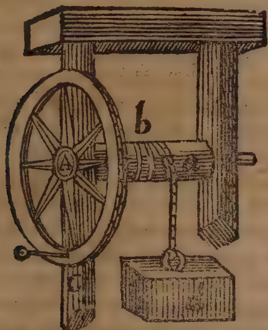
*Vis trochlearum separatarum.*

capsulæ inclusæ, absque resistentia ascensuræ sint, quamprimum trochlea *o* ascendet, & per consequens futurum, ut pondera alligata attollant.

*Vires trochlearum invicem junctarum.* XLIV. Si denique imaginemur nobis, omnia hæc pondera *l*,k,*i*, *d* in unum pondus coacervata, videmus sanè non amplius resistere ita unita; & hac ratione parvum pondus *e* poterit adæquare in finitis modis majus quod â pluribus trochleis secundum præscriptum modum dispositis suspenditur.

*Vis est sicut unitas ad duplum numeri trochlearum.* XKV. Facile notandum, proportionem virium quæ tenent æquilibrium ope trochleatum, esse uti unitatem ad duplum numeri trochlearum suspensarum; sicut igitur hic quatuor trochleæ sunt, *a*, *m*, *n*, *o*, pondus *e* unius libræ, adæquabit pondus totale *d*,*i*,k,*l*, octo librarum, & unicus vir trahens funem in *e*; resistet octo aliis capsulam trochlearum *a o* trahentibus.

*De axi rota.* XLVI. Sit rota *A C*, axis ejus *A d* circa quem convolvatur funis sustinens pondus *d*. Manus applicetur manubrio *C*, ad volvendam rotam, & attollendum pondus *d*. Cum igitur manus applicata sit in magna distantia â centro *A*, videlicet *C A* & pondus

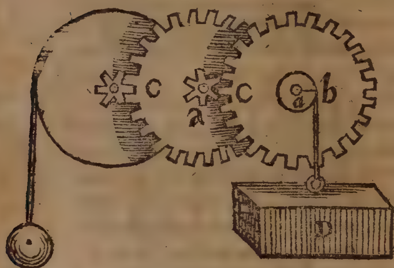



dus e contrario applicatum in parva â centro *a*, videlicet *b a*; parva vis in *e* adæquabit magnam in b; & ambæ vires in æquilibrio exiſtentes, erunt ſicut *C A* ad *b a*; i. e. ſicut magnitudo ſive diameter rotæ ad magnitudinem ſive diametrum axis.

*De rotis dentatis.*

XLVII. Ope rotarum dentatarum, mirè vis augetur; ſi enim prima rota Diametro conſtat ſexies, aut decuplo majori quam axis *a c*, vis libræ unius applicata in *c*, æquabit pondus *D* ſex aut decem librarum. Si vero primæ hujus rotæ dentes incidant dentibus axeos (a) ſecundæ rotæ, ita ut hæc ſecunda rota etiam ſex, aut decies major ſit axe ſuo vis unius

libræ




libræ applicata in *C*, peripheriæ ſecundæ rotæ, idem efficiet quod ſex vel decem libræ applicatæ axi (a) & eadem hæc vis ſex vel decem librarum in axe (a) applicata peripheriæ primæ rotæ *C*, idem efficiet quod vis ſexies vel decies major applicata in *b*. Ita unica libra in *C* adæquabit triginta ſex vel centum libras in *b*. Si jam tertiam, aut quartam rotam addas, etiam diametris ſexies vel decies majoribus conſtantes quam axes, vis ſemper multiplicabitur per ſex vel decem; ita ut unica libra *c* applicata peripheriæ quartæ rotæ, adæquaret mille ducenta nonaginta ſex, vel duo millia applicata in *b*.

*Machina ad terram*

XLVIII. Patet admodum, multiplicando rotas, attollii poſſe pondus æque

æque grave ac Terra tota, modo machina certo loco ſtare poſſit, & reſtes fortes ſatis adſint. Hinc non inanis nec abſurda propoſitio illa Archimedis, quem dicunt punctum extra terram petiiſſe, ut hanc totam e loco ſuo moveret.

*loco ſuo dimovendam.*

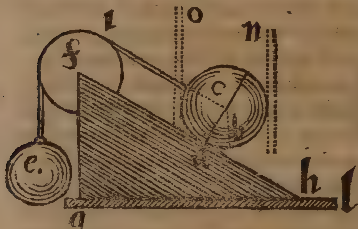
XLIX. Ut rotæ agere poſſint, neceſſe eſt dentes cujuslibet axeos eſſe æquales dentibus rotæ itsdem occurrentis; intervalla dentium etiam æqualia ſint oportet; ſimiliter numerus dentium axium & rotarum, ſemper proportionatus erit eorum magnitudini; ſi ergo rota decies axem ſuperat, etiam decies majorem numerum dentium habebit & per conſequens decuplo citius circumvolvetur axis quàm rota ipſa. Ita ut ad menſurandam vim rotæ, ſaltim numerus dentium notandus ſit, & videndum quoties axis circumvolvatur, eo temporis ſpatio, quo rota ſemel circumvolvitur. V. g ſi hic reperias axem tertiæ rotæ tricies ſexies circumvolvi, dum axis *a b* primæ rotæ ſemel circumit, concludendum, libram applicatam axi tertiæ rotæ adæquare triginta ſex libris applicatis axi *b*, & ſi unica libra applicatur peripheriæ tertiæ rotæ, quam [illegible] ſuppo-

*Vis rotarum multiplicatur ſicut earum peripheria.*

ſupponimus adhuc ſexies majorem axe ſuo, habebit adhuc ſexies majorem vim, & adæquabit ducentas & ſedecim libras appenſas in *b*.

*De Plano inclinato.*

L. Sit *planum horizontale h. g.* hoc eſt tabula ad normam poſita, nullatenus inclinans. Sit adhuc *Planum inclinatum h, f,* hoc, tabula inclinans ad alterum latus. Globus poſitus in plano hoc, retineatur ope funis *c i,* qui parallelus plano inclinato & tranſiens trochleam *f.* ſuſtinet pondus *e*; ita ut dum pondus *e* trahit ex ſua parte in altum evecturũ globum, & globus ex ſua parte reſiſtit pondere ſuo, æquilibrium exiſtat;




Dico pondus ita ſuffulcitum plano inclinato, plus ponderare quàm pondus in aere ſuſpenſum, & ſint juxta lineam perpendicularem, ad horizontem, *f g*, trahit, pondus *c* fore ad pondus *e* uti *h f* ad *f g*. LI.

*Vis ponderis in plano inclinati.*

LI. Imaginemur enim nobis, totum pondus globi iſtius coacervari in lineam vel baculum, *a c*, perpendicularem plano *b f*, qui centrum gravitatis in *c* habeat ſicut & globus, & etiam uti globus plano inclinato inſiſtat in *a*. Patet funem *i c*, trahi a pondere hujus baculi, ſicut antea a globo. Imaginemur adhuc baculum hunc non ſolum impoſitum termino *a*, ſed ibi quaſi alligatum, ita tamen, ut ibi volvi poſſit, tanquam circa punctum fixum, ut inclinet in *b*, aut elevetur verſus *i*. Ducatur horizontalis *a b*, & perpendicularis *c b*. Conſiderare poſſumus *c a b* inſtar trutinæ cujus centrum eſt *a*, brachium alterum *a c*, ita ut pondus *e* ſit applicatum in *c*; & perpendiculariter trahat verſus *i*; alterum brachium eſt *a b*, ita ut baculus *a c*, applicetur puncto *b*, (32) Jam cum pondus *e* trahat ab una parte & baculus ab altera, & hæc duo corpora maneant in æquilibrio, neceſſe eſt pondus baculi *a c*, eſſe ad pondus *e* uti diſtantia *a c* ad diſtantiam *a b*, (25 vel 31.) Sed *a c* eſt ad *a b* uti *h f* ad *f g*, quoniam hæc duo triangula *a b c*, & *f g h* ſunt ſimilia; primò enim angulum rectum habent, *b* & *g*, & cum præterea *b a b*, æquetur ipſi

ipsi $a\,b\,g$, (geomet. 1, 31,) necesse est & horum complementa $b\,a\,c$, & $q\,f\,g$, esse æqualia. Ulterius liquet, globum idem efficere quod baculum ita applicatum. Hinc & pondus globi est ad pondus $e$, uti $b\,f$ ad $f\,g$; Q. E. D.

*Animadversio in quandã legem motus propositum in Discursu de Motu locali.*

LII. Antequam ulterius progrediamur, utile est, hic reflexionem quandã addere, quæ lumen afferet ad rectius intelligendam legem quandam motus, quæ peregrina visa plurimis eorum, qui eam in discursu de motu locali legerunt. Postquam in hoc tractatu id adduximus, quod accidere posse credidimus corporibus in percussionibus, diximus §. 32. omnia ista observatum iri si corpora sibi mutuo occurrentia inæqualia forent, licet experientia, uti eodem loco notavimus, contrarium doceat, quonium videmus, parvum globum impingendo in majorem, in ipsum non omnem suam effundere velocitatem. Hinc evenit, ut plurimi eorum, qui de his regulis percussionis egerunt, velocitatem a motu distinxerint, & crediderint æqualem motum communicatum corpori bis majori, non nisi bis minorem velocitatem efficere debere. Sicut enim certa salis quantitas injecta cyatho ad dimi-

dimidiàm usque partem aquâ repleto, falſedinem efficit duplo majorem, quam ſi eadem quantitas injecta ſit cyatho pleno; ita hi Viri credunt eandem quantitatem motus diſtributam in duplo plures partes, & corpus bis majus debere duplo minori velocitate gaudere; & quod ita corpus parvū cum corpori magno, qnod offendit, nil amplius quam motum ſuum omnem communicáre poſſit, non poſſit ipſi velocitatem ſuam communicare, quoniam motus hic debeat agere velocitate proportionaliter minori prout in plures partes diſtributus eſt, & majori corpori communicatus.

*Motus non diſtribuitur partibus corporis, uti ſal partibus aquæ*

LIII. Ignoro qualem ideam de motu habeamus, dum eundem inſtar diſtribuialis conſideramus, & ponimus, quod, ſi diſtribuatur in plures partes unius corporis, ibi aut majorem aut minorem velocitatem acquirat inſtar ſalſedinis, pro ratione multitudinis partium hujus corporis, per quod diſtribuitur. Non concipio quomodo motus communicari dicetur vel diſtribuatur, niſi id fiat hac ratione, quod corpus quoddam & omnes ejus partes movemus: Parvus globus non tranſfundit motum in alterum globum, quem ferit, ſed feriendo eum

movet. Id jam in quæstione est, an magno & parvo motum æque velocem imprimere possit; & mihi quoque videtur in suppositione, quam fecimus, & in qua convenimus omnes, corpora tanquam in vacuo absque gravitate, levitate, & alio quocunque impedimento considerari debere; Mihi, inquam, videtur manifestum satis esse, in hoc casu non majori opus esse vi, ad corpus magnum quam ad parvum movendum; nec majorem requiri laborem ad movendas decem partes, quam ad movendas quinque, quoniam nec quinque nec decem ullatenus resistunt. Et certe, quoniam globus feriens alium sibi æqualem, eum movere potest, & dum movet, eidem omnem velocitatem suam communicare: uti omnes in eo conveniunt; si secundum hunc globum consideramus junctum tertio qui nullam novam resistentiam addit, nonne manifestum est, eandem vim quæ sufficit ad movendum secundum globum, si solus esset, sufficere etiam ad movendum eadem velocitate, si juncta sit huic tertio, qui nullam novam addit difficultatem? Verum equidem est, in statu eo, in quo nos sumus, plus laboris nobis esse in movendo lapide, magno quam

parvo;

parvo; nemo vero ignorat, hoc tribuendum resistentiæ, quam gravitas horum lapidum parit. Si enim magnus lapis non esset gravior parvo, non dubitandum eundem eadem facilitate moveri posse.

*Quæ Cartesius de resistentia corporum quiescentium habet, rationi contrariantur.*

LIV. Cartesius affirmat, corpora absq; gravitate a se ipsis hanc habere vim, ut ei loco affixa maneant ubi quiescunt, ita ut non sine labore inde emoveri possint; hoc autem concipi nequit. Quomodo enim concipi potest, corpus affigi posse in vacuo ei loco, ubi nihil adest, aut certe nihil firmi & solidi. Ut corpus adhæreat alicubi certe corpus quoddam solidum reperiat necesse est & immobile, cui inhærere possit, sicut anchora navis rupi inhærens. Sed quale medium, quo navis immota adhæreat & figatur in medio maris, in fluiditate aquæ, cui innatat? Quo vinculo corpus, in medio aeris suspensum, ibi ita affigi poterit, ut immotum maneat, & resistat omni isti, quod ipsum loco movere annitatur? Et quod magis est, quomodo nobis imaginari poterimus, corpus adhærescere vacuo, ut immotum reddatur, & resistat omni isti quod id inde trahere allaboret? Sani vix mihi persvadere possum, hos viros clare concipere, quod

hic dicunt ii ipsi, qui nihil a se admitti profitentur, quod non possit facile concipi. Sed ne moras diuturniores nectam, evidenter demonstraturus quam difficilis intellectu sit hæc sententia Cartesii; spero in sequentibus discursus hujus de Mechanica evidens fore, plane naturæ contrariam eam esse. In corporibus nullam resistentiam imaginari poterimus, ex eorum parte fortiorem & efficaciorem hac, quam ab ipsorum gravitate proficisci experimur; Interim annitor demonstrare in discursu de motu corporum gravium, quod parvum granum arenæ, dum cadit in lancem trutinæ unam, attollat alteram, ubi sit aliud pondus æque grave, si placet, ac tota Terra, ipsique communicet omnem velocitatem, quam habebat dum descendit; & hæc omnia adeo plausibilia reddam, tot etiam experimentis confirmabo, ut sperem non aliena videri quæ in §. 31. præmisi.

*Quod parvum corpus velocitatem suam magno communicare teneatur.*

LV. Interim, ut eo utar, quod probavi in hoc discursu de planis inclinatis, considerare possumus pondera homogenea *e* & *c* (fig, aph. L) quæ cum in æquilibrio sint, nihilominus admodum inæqualia sunt, ita ut *c* decies vel centies majus esse possit

quam

quam *e*. In hoc casu, si quid licet minimum, addamus ponderi *e*, hoc pondus vincet & descendendo attollet eadem velocitate alterum pondus *c*. Patet ergo corpus hoc parvum *e* non solum movere posse corpus decies & centies majus ipso, sed insuper ei communicare velocitatem suam; id quod sufficit ad demonstranda quæ volui.

*Corpus planum super plano inclinato.*

LVI. Si loco globi nobis imaginemur corpus planum & superficiem hujus corpus & plani inclinati adeo politam, ut corpus hoc delabatur absque ulla resistentia; conciperemus, hoc corpus eundem habere nisum descendendi, quem habet globus; tota quoque differentia, quam observamus jam, dum videmus globum descendere facilius ac corpus planum, inde est, quod superficies nunquam adeo politæ sint, quin asperitas quædam remaneat, quæ facit, ut unum in alterum impingat, & eo ipso aliquantum impediatur in motu.

*Proportio vis descendendi in plano inclinato.*

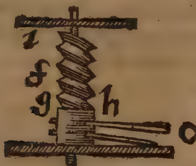
LVII. Sic in genere ponere possumus, conatum corporis descensuri in plano inclinato $fb$, (fig aph L.) esse ad totam gravitatem, uti perpendicularis $fg$ ad planum inclinatum; vel sicut sinus anguli inclinationis $fbg$ ad sinum totum.

*De Cuneo.* LVIII. Hinc cognoſcimus vim cunei; ſi enim concipiamus totum corpus *f h g*, inſtar cunei, &, cum antea nobis imaginaremur, pondus *c* trahi in altum verſus *f*, nunc ſupponamus, cuneum trudi verſus *l*, dum corpus *c* incluſum eſt clatro *n o*, in quo aſcendere vel deſcendere poteſt; evidens eſt, corpus *c* ſua gravitate reſtiturum & anniſurum, ut impediat motum cunei. Hic conatus idem eſt cum eo quo impedire nitebatur, ne verſus *f* truderetur, in præcedentibus propoſitionibus. Patet enim, eandem ſemper fore reſiſtentiam, ſive cuneo immoto corpus *c* aſcendat in *f*, ſive corpore *c* incluſo clatro *n o*, cuneus trudatur verſus *l*. Ita vis ſufficiens corpori attollendo verſus *f*, ſufficiet etiam cuneo tradendo verſus *l*. Ita ut cuneus tanto facilius trudatur, quanto acutior & facies *h f* longior in ratione ad baſin *f g*.

*Fig. aph. L.*

*De Cochlea.* LIX. Vis cochleæ inſuper hinc cognoſcitur, quoniam cochlea nihil aliud eſt, quam ſuperficies inclinata, convoluta circa arborem ſive axin. Ita imaginemur, corpus, motui ſuperne reſiſtens, applicatum eſſe in *h*, ſub primam helicem cochleæ, ſi tunc

ſaltim




ſaltim cochleam vertamus per dimidiam helicem, faciemus hoc corpus aſcendere uſque in *f*, vis quoque hic adhibenda erit ad reſiſtentiam, uti altitudo *g f*, ad longitudinem dimidiæ helicis *h f*; vel, uti tota altitudo cochletæ *g i*, ad totam longitudinem ſpirarum convolutarum cochleæ. Si cochleæ huic vectem transverſum *c*, jungamus; vim cochleæ augebimus, eo magis, quanto longior hic Vectis, & quanto manus longius ab axe applicatur.

*De cochlea infinita.*

LX. Cochlea etiam paratur, quæ occurrit rotæ dentatæ, eamque vocamus *Cochleam infinitam.* Si enim manubrio quodam vertatur, ipſa rotam maxima vi volvit.

*In omni machina motus*

LXI. In omnibus hiſce viribus moventibus obſervandum, motum perpendicularem, quem pondera eodem tempore adhibent aut ad a-

*Si propor-portionalis est.* scendendum aut descendendum, semper reciproce proportionalem esse iisdem ponderibus. V. g. in Libra




*b a c*, si pondus minus, *c*, descendit per arcum *c C*, eodem tempore quo majus pondus *b* ascendit per arcum *b B*, videmus altitudinem perpendicularem C F, esse ad altitudinem *B E* sicut brachium *a c*, ad brachium *a b*; h. e. (supponendo hæc duo pondera esse in æquilibrio) sicut pondus *b* ad pondus *c*; id quod facile in trochleis & omnibus reliquis machinis demonstrari potest.

*Principium mechaninicum desumptum a tempore & motu.* LXII. Quidam etiam exin fecere principium ad demonstrandam rationem omnium virium moventium; & evidens satis videtur, nec plus nec minus virium requiri ad tollendum pondus centum librarum per altitudinem

tudinem pedis, quam unius libræ pondus per altitudinem centum pedum; ita ut pondus unius libræ descendens centum pedes, adæquet ponderi centum librarum emetiens altitudinem pedis unius. Principium hoc quædam continet, quæ menti non adeo perfecte satisfacient, ut demonstrationes inde fieri possint. Verissimum nihilominus est, & post demonstrationes datas de viribus moventibus, audacter pro indubitato haberi potest.

*Perpetuum mobile impossibile est per Mechanicam.*

LXIII. Hinc ostendi potest, illos operam perdere, qui media inquirunt, perpetuum mobile ope Staticæ conficiendi. Ad hoc certe necessario requireretur, ut certa corpora descenderent, aliaque ascenderent, ita ut eadem, quæ semel ascendêre, etiam deinceps descendant, ac ita motum continuent, successione & circulatione continua. Manifestum vero est, in ejusmodi casibus id, quod descendit, etiam ascendere debere. Si id, quod ascendere debet, est æquale ei, quod descendere cogitur eodem tempore, impossibile est, motum a se ipso fieri, quoniam pondus æquale hoc modo non potest superare aliud æquale. Si descendens majus est quam ascendens, necesse est velo-

citatem deſcendentium certa ratione minorem eſſe; ita ut ſicut pondus deſcendens eſt ad aſcendens, ita velocitas aſcendentis ſit ad velocitatem deſcendentis; alias ſucceſſio non poterit eſſe perpetua, & plùs corporis aſcenderet quam deſcendit, vel contra, plùs deſcenderet quam aſcendat; & ita machina mox evacuaretur. Si vero velocitas deſcendentis eſt ad velocitatem aſcendentis, in ratione reciproca ponderum vel corporum, æquilibrium exiſtet & nullum commovebitur.

*Exemplum demonſtrans impoſſibilitatem perpetui mobilis.*

LXIV. Conſultum eſt adducere aliquod exemplum; Vidi quendam qui hoc modo perpetuum mobile reperiſſe ſe credebat. Sit rota quæ libere volvi poſſit circa axem fixum *a*. In hac rota parvus ſit canalis per modum volutæ factus, oriens a centro *a*, & plurimos gyros faciens usque ad peripheri[illegible]; poſtea hic canalis regreditur in ſemicirculo per *f g* usque ad centrum *a*, ubi ſe iterum oculo volutæ jungit. Cogitemus jam globum plumbeum, vel guttam argenti viri, eſſe in principio volutæ *b*; hæc gutta ſive hic globus ſequens inclinationem volutæ, deſcendet ad

infi-

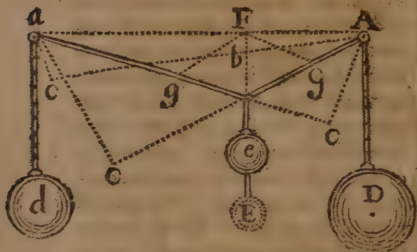

d
e

nfimum locum,& volvet totam ro-
am. Poftquam rota gyrum egit,
x globus defcendit in c; adhuc ali-
m globum pone in b, tunc ambo hi
lobi adhuc velocius agitabunt ro-
am; & poftquam finito gyro fecun-
lo ambo globi reperientur in d & c,
one adhuc tertium in b, & deinceps
lenuo quartum peracto gyro tertio,
x quintum peracto quarto. Cum
uintus gyrus incipit, globus pri-
num inmiffus delatus erit in f, & fi
ota continuet motum fuum, idem
adet per g, & ita ad initium volutæ
vel b, reveniet & iterum incipiet
lefcendere, & rotam volvere. Homo
ic credidit, rotam cogi ut continuet
notum fuum, quoniam, inquit, ad-
int quatuor globi, b, c, d, e qui nitun-
ur defcendere, & rotam volvere cum
on nifi unus fit in f vel g afcendens
x refiftens motui rotæ. Jam, inquit,
uatuor globi facile fuperabunt uni-
um. Satis interim liquet, unicum
unc globum afcendentem quater
itius afcendere, quam reliqui quatu-
r defcendunt & eandem viam, quam
lobus emetitur per quatuor circu-
os defcendendo, confici deinceps
fcendendo, per unicum gyrum. Ita
uilibet globorum defcendentium,
antum quartam partem vis iftius ad-
hibe-

hibebit, quam adhibet ascendens, & consequentes hic adæquabit omnes quatuor.

*Hæc demonstratio ad omnia alia exempla applicanda.*

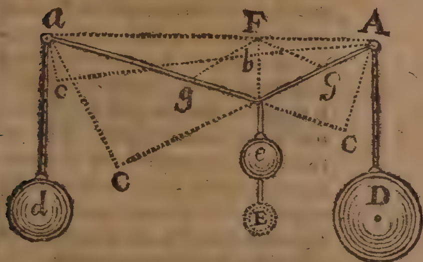
LXV. Exemplum hoc commodissimum est ut intelligamus impossibilitatem motus perpetui; discursus enim iste ad omnia possibilia exempla applicari potest, ubi ascendere faciemus liquorem, aut aliud corpus per gravitatem aliorum ponderum, aut aliarum particularum liquoris descendentis, & qui deinceps iterum ascendere debet a se ipso, ut motum continua quadam circulatione continuet.




*De ponderibus appensis medio funis, aligati terminis ambobus.*

LXVI. Imaginemur nobis funem super duas trochleas *a* & A decurrentem, & suis extremis duo pondera *d* & D sustinentem. Sit adhuc tertium pondus e, appensum puncto B ejusdē funis inter duas istas trochleas, omnia

omniaq; ista maneant in æquilibrio, ita ut funis incurvetur in B, faciatque angulum *a* B A. Ut jam proportionem ponderum metiamur, continuetur linea directionis *e* B, usque ad F. Ducantur F G, F g, parallelæ funibus duobus *a* B & A B. Dico pondus *e* esse ad pondus D, uti linea B F, ad lineam B G; idemque pondus *e* esse ad pondus *D*, ut linea B F est ad lineam B g, & consequenter D. *d*; B G. B g.

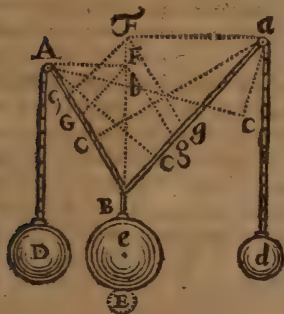



LXVII. Ut hoc probemus, imaginemur lineas A C, *a c* perpendiculariter in funes *a* B G, A B, cadere prolongatas si opus sit. Porrò nobis imaginemur unum horum funium v. gr. A B, rigidum instar perticæ ferreæ, ita tamen, ut in puncto A volvi pos- *Demonstratio virium eorum.*

 fit,

ſit, quò elevetur verſus AF, vel deprimatur verſus A C. Pondus *e* appenſum in B, deorſum trahet iſtam perticam, & vim ejus metietur linea A F, (quam perpendicularem ſuppono ipſi B F) ac ſi appenſum eſſet ex F. (32.) Pondus vero *d*, alligatum etiam in B per funem B *a d*, elevabit perticam, & vim ejus metietur linea A C, ac ſi alligata ſit in C. (32.) Ita duobus ponderibus *e* & *d* manentibus in æquilibrio, *e* erit ad *d*, uti A C ad A F (25 vel 32) h. e. uti ſinus anguli A B C ab ſinum anguli A B F. Si enim e puncto B quaſi e centro, ducatur circulus per A; B A eſſet radius ſ. ſinus totus, & A C ſinus anguli A B C, & A F ſinus anguli A B F (Geom. 4. 9.) Cæterum cum F *g* ſit parallela A B, angulus F *g* B eſt æqualis angulo A B C, & angulus B F *g* angulo A B F (Geom. 1. 31.) Jam (geom. 9. 38.) F B eſt ad B *g* uti ſinus anguli F *g* B ad ſinum anguli B F *g* h. e. uti C. A eſt ad F. A vel ſicut *e* ad *d*. Eadem ratione probabitur, quod *e*. D:: *a c*. F :: B F. B G. Q.E.D. Notandum tamen in fig. ſeqv. angulum *a* B A, qui eſt acutus, æqualem eſſe angulo *a* g F: F B vero ſemper eſſe ad B g, uti ſinum anguli F g B, h e. anguli

guli contigui F g *a* ) ad finum anguli B F g, hoc eft, uti A C ad A F. Notandum ulterius, nihil referre, an puncta *a* & A æqualiter eleventur; nam ducta *a* F vel A F perpendiculariter in lineam directionis B *e*, idem




eft quodnam fumas punctum *F* vel F, & quamnam parallelam ducas F g, F G, vel *F g* , *F g*. Videmus enim quod, cum parallelogrammata, g F G B & *g F G B*, fint æqualia, latera eorum & diametri femper easdem habeant proportiones, ita punctum F indifferenter fumi poteft, ubicunque velis, in linea directionis, etiam extra perpendicularem ductam ab *a* aut A.

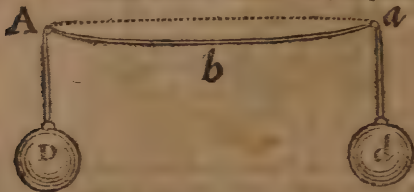
Quam

*Vis hæc prodigiosa est. Vide etiam fig. aph. L.*

LXVIII. Quam magna etiam sint pondera *d*, D, & quam parvum pondus *e* vel E, hocce tamen sufficiet ad deprimendum funem ab *a* A, & elevandum pondera *d*, D. Semper enim linea *a e* tam brevis sumi poterit, ut sit ad *a* F, uti E ad D; tuncque constructo triangulo rectangulo *a c* A, pondus deprimet funem usque in *b*.

*Impossibile est bene extendere funem.*

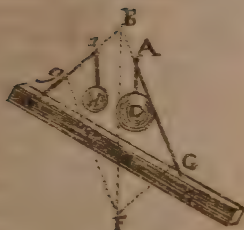
LXIX. Hinc aliquid notatu dignissimum consequitur, nullam sc. concipi posse vim, quæ ita funem trahat, ut perfecte rectus maneat. Quam enormis enim hæc sit vis, exprimi

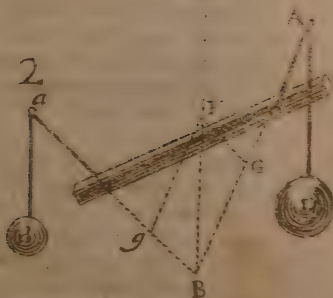



poterit magnis istis ponderibus *d* D, funem trahentibus; sed sicut funis ipse pondus quoddam habet, hæc gravitas sufficiet, ut incurvetur aliquantum funis *a b* A & eleventur pondera *d*, D.

*Situs.*

LXX. Dum corpus *o n*, cujus centrum


1
B
A
g
G
F


2
a
A
G
g
B

trum gravitatis est *e*, suspenditur per duos funes *o A n a*, hi funes ita inclinantur, ut si continuarentur, se intersecarent decussatim in linea directionis *e B*. Si enim in prima figura funis *o* A producatur usque in B, & ibi figatur, patet corpus in eodem situ manere, quoniam directiones nullatenus mutantur. Si quoque funis *n a* producatur usque in B, & ibi figatur, ille corpus in eodem, ut antea, situ sustinebit. Itaque si funes non duobus punctis *a* & A alligarentur, sed puncto unico B; corpus maneret suspensum uti antea, & consequenter centrum *e* foret perpendiculariter, sub B. (22.) Sed in sec. fig. concipere debemus funes productos usque ad commune punctum B, & rigidos instar perticarum ferrearum, ut sustineant corpus *o n*; corpus enim hoc ita suffulcitum super *o* B, *n* B, maneret, æque ac si sustineretur per funes A *s*, *a n*, ita centrum *e* perpendiculariter super puncto B reperietur; (14) Non immoror probationi, quod funes hi, (dum non paralleli sunt) se decussatim secare debeant in puncto quodam; satis enim liquet, puncta *a* A, *o n*, in eodem esse plano.

*corporum appensorum duobus funibus.*

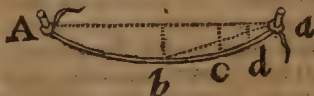
LXXI.

*Vis tractionis eorundem.*

LXXI. Corpora hæc suspensa si inclinentur, diversimode funes trahent, a quibus sustinentur; & vim tractionis hujus metimur uti in aphor. 67. sumendo punctum F in linea directionis, & ducendo parallelas F G, *F g*. Vis enim ponderis *o n*, si exprimatur per lineam F B, linea B G exprimet vim, á qua funis *o* A trahitur, & linea B *g* vim funis *n a*. Id quod adhuc exprimi potest duobus ponderibus D & *d*, quæ erunt ad corpus *n o*, uti lineæ B G, B *g* ad lineam B F. Præterea considerari possent hæc corpora sustenta tribus funibus, vel pluribus; sed, ut taceam, quod hoc diutius nos remoretur, quilibet ipse omnes hasce reflexiones instituere poterit.

*Funes suspensi duobus extremis ubique incurvantur.*

LXXII. Si pondus longum & flexile, (sicut funis) alligatur duobus terminis, incurvabitur in lineam curvam, modo aliquantulum laxum sit;




Cum enim duo extrema sint *a* A, gravitas deprimet punctum *b*, sub lineam rectam *a* A, ut & punctum *c* depri-

deprimetur sub lineam rectam *a b*, punctum *d* sub rectam *a c*; & id de omnibus reliquis punctis imaginalibus tenendum: id quod efficiet lineam *a d c b* A.

LXXIII. Hoc pondus *a b* A ita terminis extremis *a* A fixis alligatum, in eodem situ maneret, si tangentes *a e*, A E ducantur & ipsum suspendatur per puncta *e*,E. (concipiendæ sunt hæ tangentes gravitatis expertes) Funis enim *a b* A maneret in eodem situ, si imaginaremur partem *a* C esse rigidam, solamque partem C *b* A esse flexilem; licet supponamus hanc partem *a* C ita rigidam se posse vertere circa *a*, ut elevetur versus *a* A, aut inclinetur versus *a* B. Si loco partis curvæ & rigidæ *a* DC, virga recta ponatur *a* C; totum residuū C *b* A iterum in eodem situ manebit, modo interim nobis imaginemur, totam vim, cujus pars *a* D C deprimit punctum C, coacervatam esse in eodem puncto C, ope ponderis suspensi per C, quod deorsum trahit, sicut tota curvam pars *a* D C trahebant: Nihil enim refert an virga sustinens per extrema sua *a* & C, sit recta vel curva, vel alterius naturæ, modo vis extremitatis C sit semper eadem, uti hic esse supponimus. *Pro-*

*Proprietas tangentium hujus incurvationis.*

fig. seq.

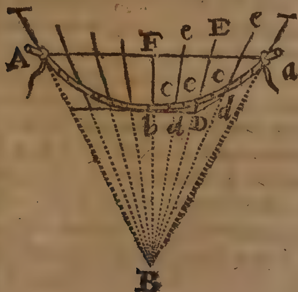
duceu-

ducendo jam hanc virgam in linea rectâ versus *c* & affigendo in *e*, omne residuum manebit, sicuti antea erat. Tandem si virga hæc flexilis redditur, instar fili *e* nihil cedet. Eadem ratione imaginemur nobis filum flexile D *a* D alligatum in *d* totum, residuum funis D G *b* A, in eodem situ permanebit. Ita si punctum D puncto *a* tantum jungamus, quantum placet, alligemusque filum in *d*, semper residuum funis D *b* A in eodem situ manebit. Quantò ergo propius etiam eò linea D *a* D accedet tangentem *a e*, ita ut, duobus punctis D & *a* in eodem puncto *a* concurrentibus,

tibus, lineæ quoque duæ *a d* & *a c* concurrant in eadem linea *a e*. Sic si suspendatur funis *a b* A per tangentem *e a* altero extremo affixo in A, omnis dispositio funis eadem erit ac si suspenderetur per extrema *a* & A. Ob eandem quoque rationem, situs non mutabitur, si puncto E alligetur per tangentem A E. Sic probavimus, quod erat probandum.

LXXIV. Tangentes continuatæ decussatim se secant, in linea directionis continuata *F b* B 70. & 73.) ita ut si elevetur perpendicularis puncti communis B offendetur centrum gravitatis *b* funis *A b a* (Fig. aph. 73. 75.) *Centrum gravitatis corporum curvorum.*

LXXV. Putarunt nonnulli funes & catenas si alligentur, duobus terminis incurvari in lineam parabolicam. *Catena & funes non incurvan-*



*tur parabolicè.* Hoc vero falsum in catenis, & in funibus, qui haut facile producuntur. Si enim catena composita ex parvis annulis iisque subtilissimis, efficeret figuram *a b* A, & ducerentur tangentes per *b*, videlicet *b* D, & per *a*, scilicet *a* D, hæ duæ tangentes se secarent in D in linea directionis DC catenæ *a* C *b* (per proposit. præced.) Concipere enim possumus, esse catenam fixam in *a* & *b*: & tunc pars ista *a* C *b* in eodem maneret situ, quo fuit alligata liberè solis extremis *a* & A. Ita centrum gravitatis in catena *a b*, erit C. Si jam linea *a* C *b* parabolica esset, linea D C E divideret *a* F in duas partes æquales, pars vero parabolæ *a* C major esset ac C *b*: facile ergo demonstratu est, centrum gravitatis in parabola *a b* non posse esse in C.

*Quo casu filum incurvaretur parabolicè.* LXXVI. Si vero concipiamus filum absque gravitate, cui infinitæ linea parallelæ æquè graves imponantur, E C, *e c*; tunc filum *a* C *b* A perfectè parabolicum esset; centrum enim cunctarum istarum linearum gravium esset in linea F *b* B h. e. in medio *a* A. Ita tangentes *a* B, A B, se intersecarent in linea F *b* B. Centrum quoque linearum inter *a* & F est in linea E C h. e. in medio *a* & F

& F $c$. Sic tangentes $b$ D, $a$ D se secabunt in linea hac E C D. Imo tangentes $b$ $d$, $c$ $d$ se secabunt in linea $e$ $c$ $d$, h. e. in puncto medio inter E & F. &c. Sed hæc proprietas parabolæ est, geometrisque notum, nullam dari aliam lineam, ubi ea occurrat.

*Quinam funes parabolicè incurvari possint.*

LXXVII. Jam ponamus gravitatem cunctarum linearum parallelarum æqualiter distributam per funem rectum $a$ A, alligatum duobus extremis; posseque funem produci trahendo, & omnes partes deorsum tendere per lineas lineæ directionis parallelas: tunc funis productus revera incurvabitur parabolicè; omne enim pondus quod in $e$ F erat, erit in $c$ $b$: pondus E $e$, in C $c$; $e$ E, in $c$ C; & $a$ $e$, &c. Sic pars funis $a$ $c$ erit longior quam $c$ $b$, quoniam supponimus omnes has partes descendere per lineas parallelas, & consequenter partem & pondus $a$ $e$ æquare parti & ponderi $a$ $c$, sicuti etiam pondus $e$ F ponderi $c$ $b$.

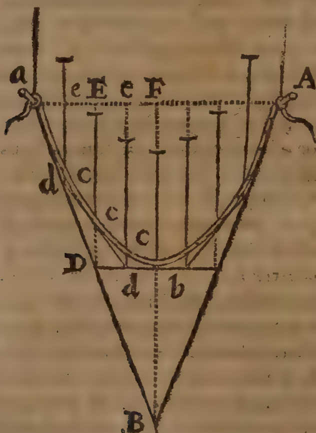
*Casus particularis, in quo funes parabolicè curvantur, & casus, ubi secus*

LXXVIII. Si funis fortiter expandatur per extrema $a$ A, fulciendo ubique infernè, ita ut gravitas ejus ipsum non possit deprimere, & sic in recta linea extendatur; Si deinceps fulcra auferantur, gravitasque liberè agere sinatur, funis iste producetur

aliquantum & incurvetur; & curvatura illa erit parabolica. Hoc ex præcedentibus propositionibus sequitur, partes enim funis hujus non descendentes, nisi vi gravitatis, quæ eas producit, descendere quoque debent juxta lineas directionis, quæ censentur parallelæ, quoniam non producuntur, nisi in quantum eas gravitas trahit.

*Casus quo funes curvantur Hyperbolicè &*

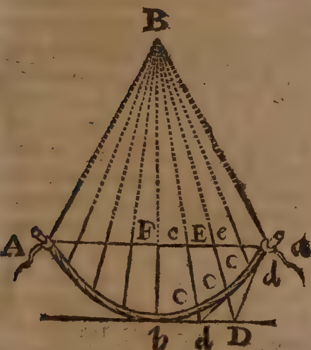
LXXIX. Si supponamus lineas directionis non esse parallelas F *b*, E C, *e c*, sed concurrere inferius in puncto




B, funis productus incurvaretur hyperbo-

ꞏerbolicè. Si verò lineæ directionis *ecliptice, uti* ꞏoncurrunt sursum in puncto B funis *in fig. sequ.* ꞏurvabitur ellipticè, vel circulariter.

LXXX. Ratio est, quoniam *Demonstratio.* ꞏi dividamus æqualiter angulum ꞏ B A per lineam B F, angulum ꞏ B F per lineam B E, & anguꞏum *a* B E per lineam B *e* &c. & supꞏonamus portiones linearum *e c*, E *c*, *c*, F *b*, &c, utpote æquè graves fulꞏ




ꞏiri filo indivisibili; oppido liquet, ꞏentrum gravitatis omnium lineaꞏum, quæ inter *a* & A sunt, reperiri in ꞏedio, videlicet in linea F *b* prolonꞏata, si opus sit; & centrum earum, ꞏuæ inter *a* & F sunt, itidem reperiri ꞏ linea media, videlicet in E C, &c.

H Ita

Ita si ducas tangentes per *a* & per *b*, se intersecantes in D. punctum D reperietur in linea E prolongata versus B; Similiter si ducatur tangens per C, intersecans *b* D in *d*, & *a* D in *d*, puncta *d* & *d* reperientur in lineis *e c* & *e c*, prolongatis versus B. Jam isti, quibus sectiones conicæ notæ, facile demonstrabunt, has esse proprietates essentiales sectionum istarum; & in genere in omni sectione conica (Parabola, Hyperbole, Ellipsi vel circulo) duas tangentes qualescunque (*a* D, *b* D) se secare in uno puncto (D) ita ut ducendo per punctum (D) lineam versus focum oppositum B, æqualiter hâc linea (B D) dividatur angulus (*a* B *b*) comprehensus inter duas lineas directionis, per duo puncta (*a* & *b*) transeuntes, unde tangentes ducebantur. Notandum, in parabola, cum focus oppositus in infinitum distet, h. e. lineæ directionis nullatenus concurrant, sed parallelæ sint; linea directionis transiens per punctum (D) ubi tangentes se intersecant, censebitur dividere angulum in duas partes æquales, eô ipsô, quod æqualiter totum spatium dividet.

*Fig. apb. 75.*

*Funes extensi sunt reverâ hyperbolici.* LXXXI Dicendum ergo funes bene extensos, & propria gravitate se incurvantes paululum elongando, in curva

curvari revera Hyperbolicè, & non parabolicè, quoniam revera lineæ directionis non sunt parallelæ sed omnes ad terræ centrum concurrunt.

*Superficies extensæ, etiam incurvantur & convexa fiunt deorsum.*

LXXXII. Hoc superficiebus applicari posset; & facile intelligimus velum superius & inferius alligatum duabus antennis parallelis, vel per latera duobus malis etiam parallelis, si infletur per ventum, incurvari in prisma parabolicum. Videmus quoque linteolum expansum per quatuor angulos, curvari deorsum propriô pondere, & capere figuram convexam. Quod si loco linteoli, imaginemur laminam materiæ cujusdam quæ facilè extenditur, ut ceræ, vel vitri liquefacti, hancque horizontaliter ponamus, super magnum rotundumque foramen, tunc lamina extenderetur in figuram fermè parabolicam.

*Usus hinc derivandus applicando hactenus dicta optica ad conficienda vitra eliptica, hyperbolica & parabolica.*

LXXXIII. Forsan hæc usum haberent in opticis quoad specula & perspicilla: hoc enim modo specula vitrea elliptica, hyperbolica & parabolica confici possent, absque dubio facilius & forsan exactius quam per reliquas hactenus probatas inventiones. Si enim vitrum bene polium & satis gracile, super laminam ferri rotundè perforatam poneretur repe-

 rire-

riretur medium sufflandi superne violenter, ita ut afflatus e foramine parvo supernè veniret, (ut è puncto B. fig. aph. 86,) dum flamma vitrum liquefaceret subtus figura ferme elliptica conciliaretur vitro, speculum mirandum in usum microscopii exhibituro. Si loco sufflatus superni, medium reperiretur, attrahendi violenter satis inferne, (ut in puncto B, fig. aph. 79.) vitrum figuram haberet ferme hyperbolicam. Novi difficultates mihi opponi solitas hac de re, sed nihil amplius de iis dicam. Fieri hoc poterit, Deo volente, in Optica, quam publicaturus sum.

*Quædam corpora rumpuntur cum trahuntur, quædam franguntur, dum flectuntur.*

LXXXIV. Funes, metalla & reliqua, de quibus sermo fuit, corpora, non rumpuntur cum flectuntur, sed solum, si violenter trahuntur. Alia e contrario dantur corpora, quæ dum dura sunt, resistunt tractioni & facile franguntur, si annitemur ea flectere, sicut vitra, lapides & ligna sicca. Ita baculum non franges trahendo in duobus ipsius terminis, franges verò flectendo supra genu. Non prolixè examinabo, unde hoc vinculum, s. combinatio partium sese tam fortiter invicem tenentium, oriatur; Non tam facilis hujus rei demonstratio est, ac credi posset, & licet hæc quæstio

ſtio ſolvenda per Mechanicam nihilofecius de eadem hic non loquar quoniam dabitur locus alius, in hoc diſcurſu de motu, isque commodior.

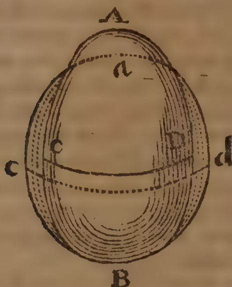
LXXXV. Notandum interim nullum corpus abſolutè rumpi unquam, niſi partes ejus nimis trahantur; ſi jam vitrum reſiſtens tractioni, frangitur, dum illud flectere volumus, inde venit, quod ope hujus inflexionis partes convexas majori vi trahamus, quam ſi directè vitrum per duo extrema trahimus, uti ex ſequentibus patebit in hoc diſcurſu.

*Nullum corpus rumpitur, niſi violenta tractione.*

LXXXVI. Hinc reperimus tam prodigioſam reſiſtentiam in ovo, quod frangere cupimus premendo duo extrema manubus ambabus: Quod admodum mirum videtur rationis ignaris, cum teſta ovorum tam fragilis, & facile admodum frangi poſſit, dum alio modo premitur. Ratio hæc eſt, quod cum teſta dura ſit, non poſſit frangi, niſi flectatur; ſi jam extrema ovi premis, teſta non flectitur: Imaginemur enim nobis ovum A B, & prematur, ut duo extrema propius ad ſe invicem accedant: Ut extremum A accedat ad B, & ſit v. g. in *a*, neceſſe eſt duo latera C, D, magis à ſe invicem diſcedere, uti videmus in *c*, *d*, ita ut totus ambitus, *c d*

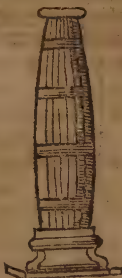
*Difficultas frangendi ovum premendo per ambo extrema.*

major ſit ipſo C D, id quod fieri nequit, quoniam teſta ovi non poteſt




diduci, & quam fragilis etiam ſit, ſatis tamen reſiſtere violentiæ trahenti valet. Ita ambitus ovi C D cum dilatari non poſſit, ſuperficies A C B, A D B, incurvari nequeunt, nec per conſequens rumpuntur. Aliter ſe res habet, ſi ovum per latera premas, quoniam circuitus ovi ita acceptus, cum non rotundus, ſed ovalis exiſtat, figuram mutare poteſt ſine diductione, & ita teſta flecti poteſt, & conſequentur frangi

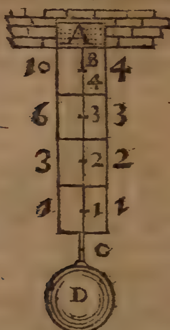
*Vis Columnarum.* LXXXVII. Ita columnæ fieri poſſunt ex aſſeribus ligneis, qui admodum fortes erunt. Si enim conjungantur, inſtar aſſularum doliolorum, eosdem



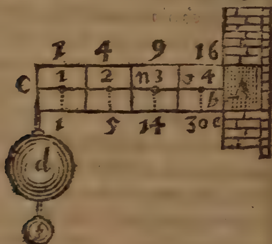
eosdem aliquantulum incurvando, & circulis ferreis circumdando, hæ columnæ cavæ ſufficient graviſſimo oneri. Videtur Architectos antiquos, aliquantum huc collimaſſe in compoſitione columnarum rotundarum & aliquantum tumentium.

*Baculus magis reſiſtit trahenti quam flectenti.*

LXXXVIII. Concipiamus baculum B C alligatum per terminum ſuperiorem tabulæ immobili, & altero termino tenentem pondus D. Baculus hic magnam habebit vim, & forſan ſuſtinere poſſet majus onus quam magnus quisque rudens. Nihilominus vis hujus baculi non eſt infinita, poteritque in D pondus tam enorme poni, ut eandem baculus non amplius reſiſtere poſſit, & frangatur vi tractionis, ſicut rudens. Suppono




pondus D esse maximum, quod baculus sustinere possit, ne frangatur; ita ut si quicquam adjungatur in D, baculus rumpatur. Jam imaginemur eundem baculum esse horizontaliter affixum unô terminô muro A immobili, & alteri termino alligari




idem

idem pondus *d*; tunc baculus hic resistere non poterit, sed infallibiliter frangetur. Hoc ut ostendamus, imaginemur baculum hunc affigi in A vel *A* extremo suo B vel *b* ope funis A B vel *A b*, & hunc funem solum esse, qui resistat, vel sustineat totum corpus B C D vel *b c d*: certè dus *d* magis funem trahet, si baculus horizontalis, quam si verticalis. Dum enim horizontalis est, libram exhibet, cujus centrum est *e*, brachium unum *e b* & alterum *e c*. Pondus *d* dum trahit *c*, tanto magis & fortius funem in *b* trahit, quanto linea *c e* longior est quam *e b*. Ita si fiat *d* ad *f*, sicut *c e* ad *e b*, pondus *f* erit maximum, quod baculus horizontalis ferre potest, ita alligatus, uti supposuimus. Jam facile concipimus combinationem partium baculi lignei inde oriri, quod hæ partes revera colligentur, non unico fune, sed infinitis parvis filamentis, quæ frangantur oportet, si baculus frangi debet.

LXXXIX. Animadvertendum nihilominus proportionem dictam, non posse esse illam, quæ revera in ligno reperitur. Posito enim baculum ligne- *Quænam proportio resistentiæ baculi in*

*bis duobus statibus.* um horizontalem digitum latitudine & 20. longitudine adæquantem frangi à pondere decem librarum, rumpetur (secundum proportionem datam) si verticalis, â pondere 400. librarum. Certum interim, quod, si baculus horizontalis decem ferre libras potest, verticalem posse ferre ultra mille & decem millia. Sed in proportione data, suppofui baculum alligatum ope funis cujusdam, omnemque vim solum in extremo *b* vel B factam; cum tamen infinita filamenta sint, quæ baculum permeant, & ubique omnes partes vinciunt; ita ut vis tractionis non solum sentiatur in extremitate *b* vel B. sed per totum baculum distribuatur. Concipiendus ergo baculus, non ut solidum quid, solummodo affixum in A vel in *A* per funem A B, vel *A b*, sed ut series particularum, 1, 2, 3, 4. similibus funibus contexarum, qui funes etiam trahuntur a pondere D vel *d*; & hoc modo funis conserens longè magis trahetur, in proportione, si baculus horizontalis; quod non satis considerasse videntur ii, qui hoc argumentum pertractarunt;

*Prima hypothesis, pro censuran-* XC. Ut adhuc magis intelligantur hæ proportiones, cogitemus baculum

lum constare ex quatuor parvis æqualibus quadratis, quæ dum ipsa gravia sunt, funem trahunt, qui eadem ita transfigit, ut alligetur centris horum 4. quadratorum, ac si quatuor funes diversi essent. Primum & infimum quadratum dum funem suum 1, 2, uno gradu virium pro gravitate sua trahit; secundum suum trahet 2, 3, duobus gradibus, quoniam non solum sua gravitate eum trahit, sed adhuc primi, quia duo hæc quadrata non nisi unum pondus constituunt respectu funis 2, 3, quia eadem sustinet. Ita funis hic 2, 3, trahetur duobus gradibus. Tertium quoque quadratum suum funem tribus & quartum quatuor gradibus trahet. Si jam cogitemus non esse amplius funes distinctos, sed unicum funem, omnia transfigentẽ, non nisi extremis A & C alligatum; tunc omnes gradus tractionis omnibus partibus totius funis communicabuntur; ita ut gradus, quô primum quadratum trahit, pandatur per totam longitudinem funis totius, duo etiam gradus secundi quadrati, & tres tertii, & quatuor quarti. Ita omnes hi gradus invicem conjuncti sunt numero decem in toto fune, qui hinc trahitur decem gradibus.

*da Si baculi tracti in longum.*

*Et ejus, qui ad latus trahitur;*

*Fig. aph. 78.*

XCI. Si vero Quadrata hæc ponantur horizontaliter, tunc conjunctim funem *b c* trahent, ac si suspensa essent in medio *n*, ubi centrum gravitatis est; & sicuti linea hæc a *b* usque ad centrum quater major est ac *e b*, funis in *b* trahetur ab his quadratis vi, quæ erit ad illam in ratione quadrupla, qua trahitur in prima figura, ubi quadrata verticalia. Ita funis quarti quadrati cum trahatur quatuor gradibus in prima figura in secunda trahetur 16. gradibus. Eodem modo quadrati tertii funis novem, secundi 4. & primi uno gradu trahetur; omnes hi gradus sibi additi faciunt 30. gradus, quibus funis trahetur.

*Progressio arithmetica, & Progressio quadratorum hic occurrentes.*

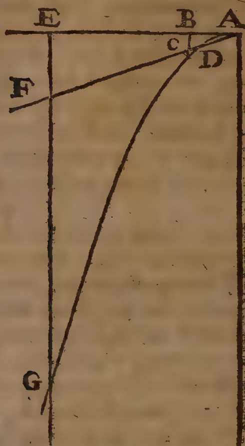
XCII. Hinc videmus gradus trahendi crescere arithmeticè in partibus verticalibus, sicut numeri earundum partium; in horizontalibus vero crescere uti quadrata ejusdem numeri.

*Hypothesis secunda.*

XCIII. Si non in 4. amplius, sed in octo partes baculum divisum concipiamus tunc cum omnes gradus tractionis in fune verticali sint 36. (id quod est summa numerorum horum arithmeticorum, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.) gradus funis

funis horizontalis erunt 204 (id quod provenit e summa omnium octo quadratorum, 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64.) Unde liquet vim tractionis crescere posse infinite magis in baculo horizontali, ultra terminum, quem regula aph. 88. data constituit, quæ tamen unica quam hactenus Autores edere.

XCIV. Si ad hæc paulum attendimus, videbimus certe, tam parvam baculi sumi posse partem, ut tantum trahat (imo magis) dum verticalis, quam cum horizontalis. Concipiamus jam partem B 4 vel *b* 4 (in iisdem fig aph. 88.) eam esse, quæ æqualiter trahatur in utroque positu. Si deinceps baculus prolongetur, usque in C, & *c*, (iisdem figuris) examinandum erit, quantum trahatur, si horizontalis & quantum, si verticalis fuerit. Imaginemur nobis baculum constare ex infinite multis partibus, quarum filamenta pergant ab uno extremo ad alterum; ducatur parabola A D G, & tangens A E, parallela axi B D, ita ut A B sit æqualis longitudini partis baculi B 4 vel *b* 4 Ducatur insuper linea recta A C F, ita ut triangulum rectilineum A C B sit æquale spatio parabolico A D B. Postea sumatur A E æqualis longitudini *Geometrica expressio de Si baculorum horum.*




totius baculi B C vel *b c*, & ducatur parallela E F G: dico triangulo A E F vim tractionis baculi verticalis repræſentante, (ſicut triangulum A B C tractionem ſolius partis B repræſentat, ſpatium parabolicum A G E repreſentaturum tractionem baculi horizontalis.

*Reſiſtentia eadem, ſive unico filamento redunita, ſive*

XCV. Effectus ſemper idem erit, ſive vis in unico fune coacervata, qui omnes particulas baculi contexit, ſive per plures funiculos diſtributa fuerit. Facile enim patet; quod ſi vis ſ.

reſi-

resistentia quæ in solo funiculo medio *Ab* erat, distribueretur per duos funiculos extremitatum *o e*, æqualiter a medio *b* distantes, vel per tres *o*, *b*, *e*, vel per quot libuerit qui tamen æqualiter locentur utrinque supra & infra medium; facile, inquam, patet, pondus *d* superaturum æqualiter omnem resistentiam in medio coadunatam, vel divisam circa medium. Quam enim vim in funiculis superioribus lucramur, recedendo a puncto fulcri *e*, hanc perdimus in funiculis inferioribus, accedentibus eidem puncto fulcienti *e*. *inter plures divisa.*

XCVI. In omnibus præterea supposuimus id, quod vinculum particularum hujus baculi constituit, esse instar funiculorum qui omnes particulas baculi transfigunt, ita ut funiculi hi tracti ab uno extremo, trahantur quoque ab altero. Hoc vero non ita est, & sine dubio filamenta ligantia partes ligni, l. aliorum corporum frangibilium non procedunt libere ab uno termino ad alterum; econtrario vero certum est, admodum breves esse, in quibusdam magis, in reliquis minus, prout corpora magis aspera, vel minus. Et sicut impossibile est hanc longitudinem nosse, cujus diversitas infinite mutat *Regula generalis de resistentia omnium corporum dari nequit.*

tat

tat proportiones virium & resistentiæ; haud possibile credo, regulam generalem dare, ut determinentur hæc proportiones in corporibus particularibus.

*Funis distractus rumpitur in medio.*

XCVII. Nihilominus reflexiones quædam fieri possunt, ut videantur loca, ubi corpora rumpi debent si flectuntur aut trahuntur. Primo, funis distractus vi quadam aliena rumpi debet præcise in medio, quoniam distractione ubique æquali existente, fractio in loco funis debiliori fiat oportet. Locus vero iste est directe in medio; quoniam versus extrema, filamenta alligantur locis istis, ubi termini baculi existunt: ita magis resistere possunt, & fortius insequentia filamenta tenere quæ cum istis primis connectuntur: ita ut hæc secunda filamenta melius vim sustineant tertiis, & hæc melius quartis & ita de reliquis, usque ad media.

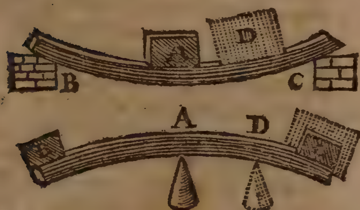
*Ubi reliqua corpora frangantur.*

XCVIII. Eadem ratione, si filamenta partes corporum ligantia illigata sint uti in funiculis, & libere ab uno extremo ad aliud vergerent, hæc corpora distracta etiam in medio frangerentur; quoniam vero hæc filamenta non ita ab extremis ad extrema procedunt, necesse est, corpora

ra hæc frangi eo loco, ubi violentior tractio, fit, ergo jam inquirendum ubi talis ſtractio fiat.

XCIX. Si capias baculum in duobus extremis, & flectas, ponens genu inter ambas manus, maxima tractio in medio genu fiet: Manifeſte enim admodum, partes illas, quæ in medio ſunt genu, in latere convexo, in oppoſitas partes trahi, alteras dextrorſum, ſiniſtrorſum alteras, cum partes dimidii baculi, ad dextram vergentis, non trahantur proprie niſi uno modo: ita diviſio vel fractio ſuper genu fieri debet; cum præterea ibi ſit locus, ubi vectis longior exiſtens, majus etiam commodum præbebit. *Baculus ad genu fractus.*

C. Sic ſi trabs vel longus lapis *Trabes vel*




fulciatur duobus muris B, C, & in medio *lapides ful-*

*citi duobus extremis.*

dio A grave onus ponatur, quod trabem vel lapidem incurvari faciat, fractio fiet in medio A. Est enim hic libra inversa; & sicut in secunda fig. si baculus impositus esset cardini A, & in duobus extremis duo pondera æqualia essent B, C, baculus hic incurvaretur eodem modo, ac si per sua extrema traheretur manibus, super genu, & fractio in medio fieret; ita in prima fig. cum pondus premat in A, & duo extrema B & C immobilia maneant, idem effectus sequi debet & fractio in A fieri.

*Trabes l. lapides pressi extra medium.*

CI. Si jam non in medio A pondus (in prima fig.) vel genu (in secunda) ponatur, sed in D, majores vires ad frangendum corpus C B requiruntur. Nam ut in secunda fig. filamenta in D jam eadem vi trahantur, ac filamenta in A, tunc, cum fulcrum ibi erat, oportet vim (punctatam) applicatam supra C tanto majorem esse, quanto distantia C D minor est, ita ut sicut CD est ad C A, ita sit vis trahens cum fulcrum est in A, ad vim (punctatam) quæ trahit, cum fulcrum est in D. Verum etiam est, tunc vim applicatam in B tanto magis diminui debere, quanto magis distantia B D augeatur; Videmus vero hanc distantiam

tiam B D augeri non posse ultra duplum, & ita vim applicatam in B nunquam ultra dimidium decrescere debere, ut æqualiter in D trahat: cum contra distantia C D diminui possit in infinitum, duplo, centuplo & omnibus aliis proportionibus, quacunque volueris; augeri etiam duplo, triplo, centuplo & in infinitum, debet vis in *C*, ita ut vim applicatam in *B* adæquaret, & trahat partem D eadem vi qua primum pondus C partes A trahebat, cum fulcrum ibi esset. Unde etiam videmus plus virium adhibendum ad frangendum baculum, cum genu non est in medio duarum manuum, quam cum ibi est. Idem de prima fig. dicendum. Virium harum proportio, ita eundem effectum procurantium, hac ratione exprimitur; Vires C & B (dum fulcrum est in D, sunt ad vires C & B (dum fulcrum est in A) uti rectangulum C A B ad rectangulum C D B.

CII. Si vero baculus, vel trabs, vel aliud corpus, affigatur muro uno suo extremo A, & in altero extremo B prematur, sive imposito onere, sive manu; fractio continget in medio C inter A & B; posito quod filamenta vinculum constituentia illigentur invicem, uti in funibus, alioquin ve- *Vis trabium & lapidum.*

ro




ro libere ab uno extremo ad alterum tendant, Quoniam vero filamenta hæc non ita ab uno extremo ad alterum tendunt, fractio fiet in medio ultimæ partis versus A, cum ibi maxima sit tractio, tam propter onus maximum ibi agens, cum totum corpus A B ponderosum sit, quam quod vectis ibi longior.

*Corpora hæc incurvantur parabolice.*

CIII. Pondus vel vis applicata in B, deorsum trahet omnes partes corporis A B, ac si appensa esset cuilibet parti I C D; & cum totum corpus A B, secundum supposita, ubique flecti possit, hic inverso modo fit, id quod in funibus extensis contingit, vel potius in filis alligatis duobus extremis, quibus fulciantur lineæ parallelæ æque ponderosæ, & æque ab invicem distantes, quæ cogant filamenta incurvari parabolice, uti demonstravimus aph. 76. Ita in hoc casu corpus A B incurvatur parabolice, dispositum præpostere ad

ad aliud, uti satis facile probari potest, applicando hic demonstrationes aph 76. seqq. & ostendendo, tangentes A F, B F, vel alias quascunque intersecare sese medio inter duo puncta A & B, vel alia, per quæ hæ tangentes ductæ.

CIV. Vide jam propositiones quasdam generales de *resistentia solidorum*, quarum demonstratio geometrice fieri potest, secundum dicta, & unde quilibet infinite multa problemata utilia & jucunda deducere possit. Supponimus hic, majoris facilitatis causa, corpora, de quibus sermo, & quæ inter se comparamus, esse prismata, quorum sectiones vel bases sunt similes figuræ, nisi in singulari casu aperte aliud dicamus. Supponimus etiam, nisi in casibus singularibus aliter nos explicemus, omnia hæc corpora esse ita unita, ut solum in eo extremo frangantur quo alligantur, ac si retinerentur funibus, qui rumperentur vi, qua hæc corpora trahunt. *Regulæ generales de resistentia solidorum.*

CV. *I. Si corpora per extremum alterum affixa sunt æque magna, nisus, quem adhibent ut frangantur proprio pondere, est in ratione dupla ipsorum longitudinis.* Nam si in fig. aph. 88. capiamus totum corpus *Corpora affixa horizontaliter uni termino.*

corpus A *c* ab una, & tantum A *s* ab altera parte, cujus longitudo e. gr. non sit nisi quarta pars longitudinis A *c*; corpus A *c* aget contra *b*, ut id frangat, ac si suspensum esset e medio *n*; ubi centrum gravitatis est; & corpus A *s* aget, ac si suspensum esset in puncto 4. ubi ipsius medium & centrum gravitatis est. Jam A *n*, A 4 : : A *c* A *s*. Sic igitur corpus A *c* fortius aget solum idcirco, quod longius applicatur quam A *s*; & hæc augmentatio actionis, s. vis acceptæ ex hoc solo capite, erit uti longitudo A *c*, ad longitudinem A *s*, h. e. quadruplo major. Cum interim corpus A *c* ponderosius sit, videlicet, quadruplo ponderosius corpore A *s*, uti longitudo A *c* est quadruplo major longitudine A *s*; corpus hoc A *c* adhuc majori vi aget, ex hoc capite, secundum eandem rationem longitudinis A *c* ad longitudinem A *s*, h. e. quadruplo fortius. Sic totum corpus A *c* ubique secundum rationem aget bis sumtam, (h. e. rationem duplam) longitudinis A *c* ad ad longitudinem A *s*, h. e. A *c* aget 16. cies magis quam A *s*. Et si id, quod corpus hoc in *b* tenet, constaret ex funibus, necesse foret funes corpus A *c* sustinentes sedecies fortiores esse.

*II. Si*

*II. Si corpora ejusdem ſint craſſitiei, tunc vis ſuſtinens onera, præcidens ea quæ propria cauſari poteſt gravitas, eſt ſimpliciter in ratione reciproca longitudinum, ſi ſumamus longitudinem a loco, ubi affixa, ad locum, ubi onus fulcitur.* Si corpus A *c* ſuſtinere poteſt in *c* millenarium pondus, ſuſtinere poteſt in *c* quatuor millia citra rupturam; Idem enim onus *d* poſitum primo in *c*, & deinceps in *s* fortius in *c* quam in *s* aget, ſecundum rationem longitudinis A *c* ad longitudinem A *s* h. e. quadruplo magis.

*III. Si ſunt ejusdem longitudinis, vis abſoluta ad ſuſtinendum onus citra rupturam ea præcidens, quæ proprium pondus cauſari poteſt, eſt in ratione triplicati latitudinis.* Uti ſi corpus A *c* primum habeat totam longitudinem *e o*, & deinceps dividatur, nec retineatur niſi latitudo *e b*, v g. dimidium; liquet, non adeo fortiter vim ſuſtinere in ſuperficie non niſi hac parva latitudine *e b* gaudente, quam in ſuperficie, quæ latitudinem duplo majorem habet *e o*; & differentiam fore ſicut ſuperficies iſtas, ſive in ratione duplicata latitudinis *e b*, *e o*, h. e. quadrupla. Nam ſicut quodlibet punctum harum ſuper-

superficierum *e o* vel *e b* coadunatum totidem punctis corporis A ope fibrarum, quasi totidem funiculis tenentibus ibi, major jam superficies ista, *e o*, respectu superficiei *e b*, tanto etiam fortius affigetur, quoniam pluribus fibris vel funibus alligabitur. Insuper respiciendum ad rationem vectis, cujus centrum est *e*, brachium alterum est *e b*, alterum, in corpore *c o e*, est, *e b*; unde sequitur corpus *c o e*, minus concedere & majus commodum habere, in eadem ratione *e b* ad *e o* h. e. dupla; Ita tota totius corporis *c o e* vis ad vim corporis *c b e*, erit in ratione duplicata *e o* ad *e b*, i. e. octuplo major.

*IV. Si sunt ejusdem longitudinis, nisus quem adhibent, ut rumpantur proprio pondere, est in simplici ratione latitudinum.* Si corpora *c o e*, *c b e* solummodo alligarentur funibus in *o* & in *b*, necesse esset, funes in *o* esse duplo fortiores quam funes in *b*. Revera enim totum corpus *c o e* plus ponderis habet quam corpus *c b e*, in ratione dupla latitudinum *o e*, *b e*, h. e. quadruplo majus. Exemplo vero vectis, cujus centrum est *e*, brachium unum *c e*, brachium alterum in corpore *c b e*, fit *e b*; & nisus corporis *c o e* minor fit nisu corporis

*c b e*

c b e in ratione e o ad e b, h. e. dupla: ita omnis nisus corporis c o e erit ad nisum corporis c b e simpliciter in ratione e o ad e b, dupla.

V. *In corporibus ejusdem longitudinis, rumpi conantibus proprio pondere, vis respectiva, h. e. resistentia, quam præbent, ne frangantur, respectu nisus a gravitate ipsorum provenientis: vel potius nisus, quem præbet gravitas respectu vis resistentis, est in ratione duplicata latitudinum.* Absolute enim loquendo corpus c o e fortius est corpore c b e, in ratione triplicata o e ad b e, per tertiam propos. hujus aph. nisus vero etiam ponderis c o e, adversus o e, major est in ratione simpla o e, ad b e, per quartam propos. Ita vis totius corporis c o e comparata cum nisu gravitatis ipsius, est ad vim corporis c b e etiam cum nisu gravitatis comparatam, in ratione duplicata o e ad b e.

VI. *In omnibus istis longitudo brachii verticalis vectis sumenda ab hypomochlii puncto extremo (e) usque ad altitudinem centri gravitatis superficiei (e b o)* Ut enim quodlibet punctum hujus superficiei, e b o, tenet certa vi, & resistit nisui quem alterum brachium exercet,

 imagi-

imaginari nobis possumus hanc vim cujusque puncti instar ponderis, quod eam trudit versus corpus A tanquam suum horizontem; Ita centrum hujusmodi ponderis esset in eodem puncto, ubi revera verum centrum gravitatis hujus superficiei. Cum vero hoc cent um gravitatis semper reperiatur in figuris similibus in distantia quadam puncti e proportionata altitudinibus *e b*, *e o*, indifferenter pro brachiis trutinarum, vel altitudines superficierum, vel distantias a centro gravitatis assumere licet.

*VII. In omnibus corporibus, cujuscunque longitudinis, vel latitudinis sint, vis absoluta est in ratione composita triplicatæ rationis latitudinum, (si sectiones sunt similium figurarum, vel, ubi hoc non obtinet, in ratione superficierum, & in ratione altitudinum usque ad centrum gravitatis) & reciproca longitudinum.*

*Corpora sufulcita horizontaliter in duobus extremis.*

*VIII Corpora suffulcita in duobus extremis, duplo majorem vim habent, ac ista quæ affiguntur uno solum termino, l cet alias æquæ crassa sint & æque longa.*

*IX, Regulæ præcedentes veræ sunt in corporibus suffulcitis, in duobus extremis, respectu vis istius quam*

*quam habent, quæ portant in medio citra periculum fractionis.*

*X. In corporibus ejusdem longitudinis & ejusdem crassitiei, quorum quædam portant onus in puncto medietatis A, & reliqua in puncto D, extra medietatem propiori uni extremorum quam alteri; vires ita portandi citra periculnm fractionis si a proprio ipsorum pondere abstrahamus, sunt reciproce sicut rectangula segmentorum CAB, CDB* (101.) *aph.* 100.

*XI. Unde sequitur, quod si corpus ejusmodi esset figuræ; ut sectio ab uno extremo ad alterum usque continuata, esset circularis vel elliptica, & sectiones transversæ earundem essent figurarum, ubique æque forte foret.* Sectiones enim transversæ semper æquales sunt, vel proportionales rectangulis C D B.

CVII. *XII. In corporibus inclinatis, affixis uno extremorum, vel suffulcitis utrisque, vires absolutæ extremitatum ipsorum sunt uti in corporibus ejusdem longitudinis horizontalis (h. e. terminatis inter duo plana verticalia & parallela,) & quorum sectiones factæ per idem planum verticale, æquales forent.* *Corpora inclinata.*

Fig. seq. Ita corpus inclinatum (c a) tantundem virium habet in (e o) ac horizontale c A, licet longius & arctius sit, modo ambo ejusdem longitudinis horizontalis sint, videlicet, modo ducta c d verticali, & d e horizontali, inveniatur d e æqualis ipsi c A: & alioquin superficies (e o) etiam æqualis sit superficiei e o & c ipsi (c) & altitudo e o altitudini (e o)

*XIII. Determinare locum ubi corpus inclinatum affixum uno extremo frangi debet, considerando omnes partes corporis hujus unitas in longum iisdem filamentis, quæ eas transeunt ab uno extremo usque ad alterum.* Ab extremo (o) su-



peri-

perioris, ad punctum *g* superficiei inferioris, ubi linea directionis totius corporis, ducatur linea recta *o g*, super ea sit perpendicularis *o b*; dico corpus debere frangi in *o b*. Si enim punctum *b* imaginemur nobis esse centrum cujusdam vectis, cujus brachium unum *b p*, cui insistit totum pondus corporis (a c,) alterum *b o* resistens divisioni; Si quoque aliud nobis imaginemur punctum, qualecunque illud fuerit, *i*, sive superius aliquantum s. inferius in eadem superficie, veluti centrum alterius vectis *k i o*, si tum semper accidat, *p b* majorem habere rationem ad *b o*, quam *k i*, ad *i o*, h. e. brachium *i o* majus esse respectu brachii *i*k, quam *b o* respectu *p b*; verum etiam erit, pondus (a c) acturum fortius in vecte *p b o* quam in vecte k *i o*. Hoc experimur reipsa; si enim *i n* ducatur parallela *b o*, vel perpendicularis ad *g o*, semper verum erit quod *p b b o*: *K i*. *i n*, quoniam tam *p b*, *K i* quam *b o*, *i n* sunt, uti *g b*, *g i* (Geom. 6. 42.) Jam *i o* est semper major ipsa *i n*, (Geom. 2.19) quoniam per hypothesin *i n*, est perpendicularis: ita *i o* erit semper major respectu k *i*, quam *b o* respectu *p b*; & consequenter su-

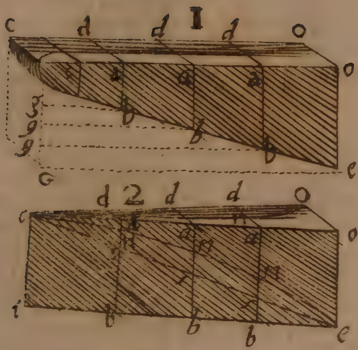
perficies in *i o* fortior eſt, & magis reſiſtit brachio *i* k, quam ſuperficies *b o* brachio *p b*; ratio ergo in *b o* eſt, quod corpus hoc debilius ſit, & inde etiam frangi cogatur.

*Telamo ſ. Mutulus parabolicus æque fortis per omnes partes ſuas.*

CVIII. Ponamus porro omnes corporis partes eſſe æque fortes, & æque diviſibiles, in proportione magnitudinum; jam imaginemur Telamonem, cujus ſuperficies ſuperior ſit parallelogrammum *o* C, ſuperficies parallelæ amborum laterum ſint parabolicæ *o b c e*, quarum axis eſt *o c*, vel O C, ſupremum *c*, vel C, applicatæ verticales *o e*, *a b*; Hic Telamo æque fortis erit per cunctas partes, ad portandum onus in extremitate *e* C, ut præſcindamus id, quod proprium pondus cauſari poteſt. Nam ſi ſumas ſuperficiem *b a d*, brachium *b a* in trutina *a b g* majus erit reſpectu brachii *b g* quam brachium *e o* reſpectu brachii *e* G trutinæ *o e* G; & hæc differentia eſt in ratione ſubduplicata longitudinum *c a*, *c o*, h. e. in ratione *b a*, *e o*, ſecundum naturam parabolæ. Cæterum ſuperficies *b a d* debilior eſt ſuperficie *c o* O, in eadem ratione *e o*, *b a*. Ita debilitas ſuperficiei *b a d* cum ſit compenſata magnitudine brachii *b a*, hæc ſuperficies *b a d*, reſiſtere debet ponderi, quod

*Fig. I.*

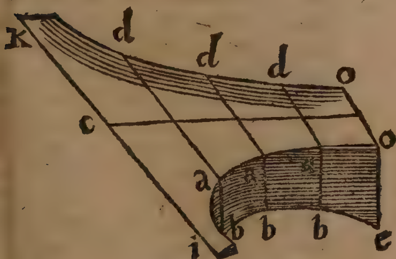
P. 198.



quod ageret per brachium *b g*, quantum ſuperficies *e o* O reſiſtit eidem ponderi, quod agit per brachium *e* G.

CIX. Sic ſi alius Telamo ambas ſuperficies, ſuperiorem & inferiorem habeat, æquales, parallelas & triangulares, ſuperficieſque laterum parallelogrammas, *o e i c*, ita ut *o e i c*, ſint verticales; hic telamo etiam ubique æque fortis erit ad ferendum onus in *c*. Onus enim ageret contra ſuperficiem *b a d* debilius multo quam contra ſuperficiem *e o* O, ſicut *b i* eſt brevior *e i*; ſed & ſuperficies *b a d* minus ſuſtineret, quam ſuperficies *e o* O, ſicut *a d* eſt brevior quam *o O*, h. e. uti *ib. ie.* *Telamo triangularis æque fortis ubique.* *Fig. 2.*

CX. Ita ſi ſuperficies ſuperior eſt planum terminatum per duas Hy- *Telamo Hyperboli-*



*cus ubique æque fortis.* perbolæ aſymptotas *o a a*, O *d d* & rectam aſymptotam, *i* k, ſuperficies inferior planum, *e i* k, ſuperficies laterum curvæ factæ per verticales *a b*, *a b*, & *d*, *d*; hic Telamo etiam æque fortis erit ubique, ac ferendum onus in puncto *c* f. tota linea *i* k, modo hoc onus æqualiter extendatur ultra citraque punctum *c*. Nam ſecundum naturam Hyperbolæ omnes ſuperficies *b a d* parallelæ ſuperficiei *e o* O, ſemper æquales ſunt, & trutinæ *o e*, *G a b g*, ſemper ſimiles.

*Pyramis horizontalis æque fortis ubique.* CXI. Si vero in fig. 2. aph. 108. imaginemur genus pyramidum *c n e* cujus ſectiones *n a n*, parallelæ baſi e o O ſint ſimiles & ſectio verticalis *e n e* ſit Parabola, cujus axis eſt *c*; hæc pyramis horizontaliter poſita ubique æque robuſta erit, reſpectu niſus, quem adhibet proprium pondus. Niſus enim partis *c a n*, ad niſum totius corporis *c o e*, ſi reſpiciamus ſolam gravitatem, eſt in ratione compoſita longitudinum *c a*, *c o*, & ſuperficierum *n a n*, *e o* O; (corpora enim hæc *c o e*, *c a n*, ſemper ſunt quinta pars priſmatum quæ eandem baſin agnoſcunt, *e o* O vel *n a n*, & eandem longitudinem *o c*, vel *a c* & conſequenter ſunt veluti hæc priſmata in ratione compoſita longitudinum

dinum *o c*, *a c* & superficierum *e o O*, *n a n*) Respectu vero vectis, cujus centra essent *n* vel *e*, brachium unum *n a* vel *e o*, alterum æquale distantiæ *a c* vel *o c*, (sive sextæ parti hujus distantiæ, ubi demonstrari potest, quod, centrum gravitatis corporum *c a n*, *c o e* reperiatur nisus partis *c a n* est ad nisum totius corporis *c o e* reciproce uti *c a*, *c o*; Ita omnis nisus corporum horum tam rationem gravitatis, quam ratione vectis, est in ratine superficierum *n a n*, *e o O*: imo & vis, sive resistentia superficierum *n a n*, *e o O*, est ut superficies ipsæ *n a n*, *e o O*.

CXII. Considerare jam possumus pyramidem verticaliter positam uti fastigia turrium, & examinare vim qua pollent resistendi ventis, & subsistendi. Si pyramis quædam est, cujus sectio per axin sit rectilinea, uti *e s c o* & abstrahamus a gravitate solummodo vinculum considerantes, quod est inter partes, æque robusta erit ubiq; ut vento resistat, qui eam dejicere annititur. Vis n. venti qui afflat totam superficiem, *oesc*, est ad vim venti afflantis partem *a s c*, sicut tota superficies *o e s c*, ad partem *a s c*, h. e. in ratione duplicata *o c*, *a c*, vis vero etiam tenens su- *Pyramides verticales æque fortes ubique. F. 2. aph. 100.*

perficies *e o* O, *s a d*, est uti superficies ipsæ, h. e. in ratione duplicata *e o*, *s a*, vel *o c*, *a c*; cæteroquin trutinæ *c e o*, *c s a*, similes sunt, sumamus pro uno brachiorum *c e* & *c s*, vel tertiam partem eorum, ubi reperitur centrum gravitatis superficierum *c e o*, *c s a* contra quas ventus flat.

*Turris parabolicus ubique æqua fortis.* CXIII. Si sectio pyramidis per axin est parabola *e b e*, cujus axis *c o*, hæc pyramis ubique æque fortis erit ad resistendum vento, respectu vis ponderis partium resistentium propriis gravitatibus. Vis enim venti qui totam parabolicam superficiem *o e b c* afflat, est ad vim venti afflantis parte *a b c* uti tota superficies ad hanc partem, vel in ratione compo- *e o*, *c a*, & *o e*, *a b*: Respectu vero vectis, cujus brachium unum esset altitudo *o c*, vel *a c*, (vel distantia, semper huic altitudini proportionalis usque ad centrum gravitatis superficierum parabolicarum, & consequenter viribus venti,) alterum vero brachium *o e*, vel *a b*; nisus venti major esset contra *o e*, quam contra *a b*, in ratione *o e*, *a b*; ita ut omnis nisus venti, tam ratione magnitudinis superficierum, quas afflat, quam ratio-

ratione vectis, semper sit in ratione composita *o c, ac* & rationis duplicatæ *o e, ab.* Resistentia vero etiam vel vis superficierum, *e o O, b a d*, est uti gravitas corporum *b o c, b a c* h. e. in ratione composita *o c, a c*, & rationis duplicatæ *o e, a b.*

CXIV. Hinc videmus pyramidem *o e s e*, fortiorem esse inferne versus *o e*, quam superne in *a s* vel (a s) respectu habito ad resistentiam, quam revera causatur gravitas; Si vero pyramis secatur versus cuspidem in (a s) fortior erit versus inferiora & superiora quam versus ullum locum intermedium; & hoc problema sa[tis] pulchrum est determinare locum pyramidis debiliorem, & ubi ventu[s] eam frangere & dejicere possit. E[st] problema; *Pyramis acuta* (a s e o) *si detur, invenire sectionem* (*s a s*) *parallelam basi e o O, quæ talis sit, ut trapezium* (*a s s a*) *multiplicatum per lineā ductam per centrum gravitatis, perpendiculariter super basi* (*s a*) *majorem rationem habeat ad segmentum pyramidale* (*a s s a d multiplicatum per basin trapezii,* (*s a*) *quam omnia alia trapezia facta per aliam sectionem, & multiplicata itidem per lineam*

*Locus debilior pyramidis acuta.*

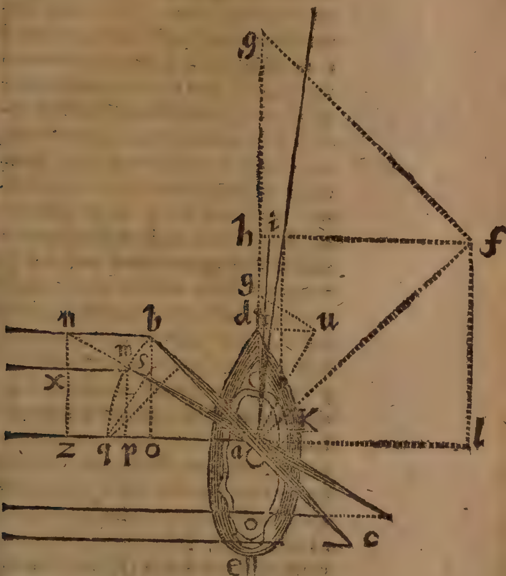
*ductam per centrum gravitatis in basin, ad segmentum pyramidale ortum per hanc novam sectionem, & multiplicatum per basin hujus novi trapezii.* Hoc problema non tam difficile, quam prolixum.

*Applicatio regularum Staticæ, ad motum navis.*

CXV. Omnes hæ cognitiones, admodum utiles esse possunt in Architectura & reliquis artibus; & si opifices ope diuturnæ experientiæ & boni judicii judicare possunt firmitatem & fragilitatem ædificii & similium rerum: Non dubitandum, si hoc judicium & diuturna experientia juvetur cognitionibus Mechanicæ, quin multo admodum tutius judicare possint; melius remedia incommodis obortis sint reperturi; majori securitate cautelas sument, & sine dubio inutilibus sumtibus parcent. Discursus hic, qui non nisi generales regulas continere debet, non videtur permittere ut hæc ad casus singulares applicemus; ast non ingratum puto, si exemplo quodam ostendatur usus Mechanicæ in natura explicanda & artibus perficiendis. Subjecti ergo loco motum Navis assumo quæ sine dubio pulcherrimum artis opus. & ubi industria humana videtur o-

ptime

optimè observare præcepta mechanicæ naturalis.




CXVI. Consideremus ergo navim *a e*, cujus major antenna *b c* sustineat velum in eodem situ, dum ventus flat a latere, *n b*, *z a*. Ducamus perpendicularem in antennam, scilicet *a f* &

*Demonstratio Viæ navis, propulsæ Vento laterali.*

*af* & lineam aliam *adg* secundum carinam navis, tertiam *fg* parallelam antennæ vel velo. Secundum demonstrata in discursu de motu locali §. 28. nisus venti pelleret antennam versus *af*; & si navis rotunda instar globi esset, ut indifferenter eâdem facilitate in omne latus moveri possit, moveretur hoc casu versus *al*, quoniam ab hoc latere impellitur a vento. Sed cum navis longitudo major sit, quàm latitudo, & facilius moveatur in longum carinæ versus *ag*, quam ad latus versus *al*, magis decurret versus *g* ac versus *l*, prout hæc facilitas major erit. Ponamus ergo centies citius moveri in longum juxta carinam, quam ad latus, & centies majori vi opus esse, ut pellatur ad latus ab *a* versus *l*, quam ut pellatur per puppim *c* versus proram *d*: conficiatur rectangulum *fhal*; sumatur *hi* centesima pars ipsius *hf*; dico navim ituram in linea *ai*. Impressio enim eam versus *af* protrudens, concipi potest e duabus composita, quarum una fert in longum carinæ versus lineam *hf*, & altera ad latus versus *lf* (Mot. local. §. 25.) Cum vero impressio hæc lateralis non nisi centesima parte agere possit,

patet

patet eô tempore, quo Navis perveniet ad lineam *b f*, non percurſuram a latere niſi ſpatium *b i*, nempe centeſimam partem ex *b f*, quam percurriſſet, ſi ita liberè excurriſſet in hoc latere.

CXVII. Concipere adhuc poſſumus navem moveri in linea *a g* ſicut in plano inclinato; nam in triangulo *a f g*, navis directè pelletur verſus *a f*, ſicut pondus verſus horizontem; ponamus non poſſe moveri ad latus, ſed ſolum in longum carinæ, impulſus eam pellet verſus *g*, ſed cum gradu diminuto, ita ut ſi vis venti repræſentaretur lineâ *a f* impulſus non verſus *a g* ageret, niſi vi, quam exprimit linea *a b*, ſecundum aphor. 51. Quoniam hic *a b* eſt ad *a f* uti *a f* ad *a g*; ita navis iret usque in *b* per hanc vim venti *a f*. Cum interim navis non plane incapax motus lateralis ſit, ſed ſuſcipere poſſit centeſimam partem iſtius motus, ſumenda eſſet *a k* centeſima pars ipſius *a f*, & ducenda parallela *k i*; nam ſic habebimus *a i* viam Navis, eôdemque tempore cognoſcemus deveniſſe illuc è ſpatio *b i*. *Alia hujus via demonſtratio.*

*In hiſce non attendimus ad id, quod tota maſſa Navis, ſeſe exponentis vento, contribuere poteſt, ut*

*citius*

*citius devehatur; ponimus quoque gubernaculum (e) esse prorsus rectum secundum carinam.*

*Mutatio obliquitatis antennarum & velorum.*

CXVIII. Consideremus deinceps navi & vento in eadem dispositione manentibus, obliquitatem antennæ mutari, & jam esse in *a m*, acutioremque angulum cum vento facere. Ducamus *a u* perpendicularum antennæ; tunc secundum lineam hanc *a u*, navis à vento pelletur, (Mot. loc. §. 28.) Ducamus adhuc *m p*, *b o*, perpendiculares vento *a p*; sumaturque longitudo *a u*, ita ut *a f* sit ad *a u*, in ratione duplicatâ ipsius *b o* ad *m p* denique ducamus *u d* perpendicularem carinæ *a d*, in qua sumatur centesima pars *d t*. Dico navim ituram per lineam *a t*, eô tempore quô ivisset per *a i*, si antenna mansisset in *a b*. Si enim ex centro *a* circulum ducamus *b m q*, perpendiculares *q s*, *q r*, (æquales *m p*, *b o*) metientur vim ejusdem venti, *q a*, qui impetum facit in duas antennas (Mot. loc. §. 24. 25. 26.) & sicut *q s*, vel *m p* minor est quam *q r*, vel *b o*, etiam vis venti diminuitur ex hoc solo capite, ea proportione, qua linea *m p* est minor ipsa *b o*: Cæterum vis venti adhuc diminuitur in eadem proportione ex alio capite. Si enim antenna est in *a b*, pel-

litur

litur per totum ventum qui est inter $b\,n$ & $a\,z$; cum contra, dum est in $a\,m$, non pellatur nisi ventô qui est inter $m\,x$ & $a\,z$; ita hæ duæ vires in eadem diminuuntur proportione lineæ $b\,o$ ad $m\,p$, h. e. in ratione $f\,u$ ad $u\,a$ quæ sumtæ sunt in ratione duplicatâ ipsius $b\,o$ ad $m\,p$. Vi venti jam expressa per $a\,f$, dum antenna est in $a\,b$, vis hæc exprimetur per $a\,u$, si æqualiter totum motum suscipere posset; sed cum centies facilius secundum carinam moveatur $a\,d$, quam ad latera, movebitur versus $t$, secundum antea demonstrata.

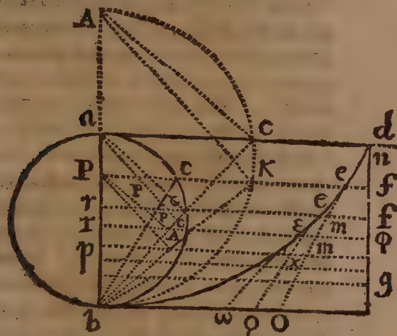
CXIX. Hisce considerationibus determinari potest obliquitas antennarum, ad properandum aptissima; quo obliquior enim antenna versus ventum, eo minus deflectit navis, sed etiam minus properat; contra, quo rectior antenna est ad ventum, citius navis deflectit, ita, ut antenna hac ratione disponi possit, ut tam cito deflectat, quam procedat: imo postquam ad certum angulum deventum, noxium est, eum magis augere, quia tunc navis minus procederet; hique anguli ope Mechanicæ & Geometriæ perfectè determinari possunt, æque *Alia marina considerationes.*

ac infinita alia problemata magni momenti, marina concernentia : uti, v. gr. Duæ naves si dentur, & ventus flans, determinare tunc Rhombum & obliquitatem aptiorem altera, ad alteram sequendum vel fugiendum. Si incedendum turmatim, determinare obliquitatem, quæ sumenda, & magnitudinem turmarum. Determinare optimam figuram navis, ut velocius incedat vel fortior sit. Id quod inclinatio gubernaculi efficere potest, ad vertendas naves, impediendas ne declinent, & cogendas ut magis contra ventum incedant. Quare Navis contra ventum incedere possit; licet vela rigida sint uti Chinensia quæ mattis vel storeis constant. Ad quem usque Rhombum venti contrarii progredi possimus sine declinatione. Quale commodum a velis flexibilibus, si inflentur, (Parabolicè.) existat. Cui usui sint vela latina, demonstrarique potest, vela latina, hyperbolicè conjuncta, quorum malum & Horizon asymptota; æqualem vim habere supernè & infernè, ut Navis ad latera inclinetur, licet malum infinitè elevetur, vel velum infinitè extendatur undiquaque. Omnia hæc resolvi pos-

sunt

ſunt hiſce regulis Mechanicis; ſed explicata ſufficere credo propoſito meo.

*Cum pagina quadam adſint vacua, & in præfatione mentionem fecerim motus uniformis in Cycloide; motum indicabo quo utor, ut hanc uniformitatem demonſtrem; quô videre poſſim, ſi Huygenius ſuam publicaverit demonſtrationem, num ſatis felix fuerim ut conſentiam cum tam magno Viro.*




# PENDULUM

## IN CYCLOIDE.

E Circulo *a c b* fit cycloides *d e e* ε *b*, *ω o* eſt tangens, *d g*, *e o*, eo

εω,

$\epsilon\omega$, sunt tangentes diversæ. Dico motum ponderis semper eodem tempore per omnes tangentes $dg$, $e\sigma$, eo &c. fieri. Nam si parallelis $da$, $f\epsilon$, $c\,P$, $fm$, $c\,p$, $\Phi\,m$, $\epsilon\pi\,p$ &c. ducantur tangentes $dg$, $e\sigma$, eo &c. erunt æquales & æqualiter inclinatæ ad funes $b\,P\,a$, $b\,p$, b pc. &c. in quibus funibus tempus semper æquale est.

Lineæ $gd$, $gf$, $g\,fg\,\Phi$ &c. continuo parallelæ sunt. Dico motum eodem tempore fieri, per omnes tangentes $df$, $em$, e m, $\epsilon\mu$ &c. sicut enim tempus totius $dg$, ad tempus partis $df$; ita tempus totius $e\,o$, ad tempus similis partis $e\,m$. Sumamus quamcunq; progressionem harum tangentium, uti $df$, $em$, e m, &c. ab una parte; & $em$, e m, $e\mu$ &c. ab altera imaginemur corpus incipiens descendere de $d$, moveri per $df$, & deinceps per $em$, e m &c. & aliud corpus primo æquale, incipiens per $e$, descendere per $em$, e m, $\epsilon\,\mu$. &c. *Dico hæc corpora mota iri eôdem tempore in tangentibus, quæ consistunt ordine progressioni ipsarum simili*, v. gr. per 3 (e m) progressionis $df$, $em$ em &c. & per 3am $\epsilon\mu$ progressionis $em$, e m $e\mu$ &c. Nam propor-

tio-

tiones cordarum æquales & æquè inclinatas, *a* P, *c p*, c p, *κ* $\varpi$ &c. sumamus, & continuemus 3tiam c p (æqualem ipsi e m) donec concurrat cum *a d*, in puncto C. Per punctum C ducatur circulus *b* C A. Si pondus descenderet per C c p, incipiendo per C, veniret in (c) eodem tempore quò perveniret iu *a*, si descenderet per A *a*, incipiendo ab A; & motum continuans versus c p *b*, percurreret lineam c p, eodem tempore ac lineam *a* P (facile enim videmus p P esse parallelam ipsi *c a*. Jam notum, pondus viam (c p) percurrere eodem tempore, sive incipiat moveri per lineam C c, sive venerit per duas *a* P, *c p*; ita tempus quod pondus impellit ut percurrat hanc 3tiam, c p, descendendo per tres *a* P, *c p*, c p idem est cum illo, quô pondus deferretur, in *a* P, descendendo per A P, & incipiendo per A. Idem vero pondus utitur eodem tempore ad percurrendam 3am *κ* $\pi$ (secundæ progressionis) si incipit descendere per *c p*, & motum continuat deinceps per c p, *κ* $\pi$; producendo enim $\pi$ *κ*, offendes circulum A C K, in linea P c K, quod facile demonstratu. Ita tempus per K *κ*, est æquale tempori per A *a*, & tempus per *κ* $\pi$ tempori per *a* P.

Inde

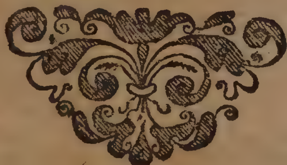
.. Inde sequitur, si sumatur progressio terminorum infinitorum *d f*, *e m*, em *eμ*, &c. procedens versus inferiora cycloidis *b*; motus ibi fiet semper eodem tempore, quo etiam tempore corpus incipiat descendere. Et sicut termini hujus progressionis tam parvæ esse possunt ac velis, ita ut primus *a* P vel *d f* modo millesima pars sit, vel centesima millesima, vel centum myriodena pars diametri *a b*; patet omnes hosce terminos progressionis, cum sint tangentes infinitè minores cycloide, haberi posse pro ipsa Cycloide, & ita motum per cycloidem semper eodem fieri tempore, a qualicunque puncto corpus descendere incipiat. Si velimus, hæc ad demonstrationem veterum reduci possunt; nam motus qui fit in hisce tangentibus quæ ita inferne tendunt, *d f*, *em*, em &c. semper brevior est isto, qui fieret per Cycloidem *d e e e* &c. licet multiplicando terminos progressionis, infinitè accedamus æqualitati; sed &, si tangentes, sint ductæ sursum *en* en, *eν* &c. motus ibi erit majori tempore quam in Cycloide.

Pondus suspensum in puncto *d*, per funem duplicem diametri *a b*.

truti-

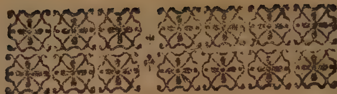
trutinas inter duas cycloides ſimiles *de* e *ε*, & *d E*E, infra deſcribet & cycloidem totam, æqualem & ſimilem ſuperioribus, & omnes vibrationes tempore fierent æquali. Nam ſemper *e o*, e o ( vel *e b*, c b ) eſt dimidium reſidui Cycloidis *e b*, e b.

*Finis de Viribus Moventibus.*



DUÆ

# DUÆ
# MACHINÆ
*ad facillimè conficienda*
## HOROLOGIA
GALLICO IDIOMATE
DESCRIPTÆ ET EXPLICATÆ
*per*
P. IGNATIUM GASTONEM
PARDIES, SOCIETATIS JESU;
In
*LATINAM LINGUAM*
TRANSLATÆ.



# PRÆFATIO.



*Ifficultas, quam experimur in conficiendis horologiis Solaribus, & in tædiosa diversarum operationum prolixitate, quæ instituendæ sunt communem methodum adhibenti, delectamentum nobis ordinariè adimit, quod aliàs ex studio tam curioso tamque utili proveniret. Hinc non satis æstimari possunt inventiones praxes hasce faciliores reddentes. Duas en Machinas ad hoc propositum admodum commodas, quoniam iis mediantibus unius horæ spatio ratio quævis horologia conficiendi disci potest, ea quoque, quæ didicimus ludendo quasi exercere; & fa-*

*& facillimè omnis generis horologia in muris & in conclavibus describere possumus.*

*Non cogitandum autem, usum instrumentorum horum operationem mechanicam esse, ubi cæco impetu agamus, quid agamus nescientes. Quantum ad operationem, praxis simplicissima & certissima pro doctissimâ & omnium maximè geometricâ tenenda est; & puto admodum difficile esse, cum minore labore aut majori certitudine, sine harum machinarum ope quicquam in hoc negotio efficere. Sed si de Theoria addiscenda agitur horologiorum, eandem melius, quam ope harum duarum machinarum addisci posse non credo, utpote quibus facilè monstratur ratio omnium operationum, proportio linearum horariarum, Solis cursus, sectiones*

*arcuum signorum, verbô tota scientia gnomonica,*

*Descriptio harum Machinarum è libro quodam latino, cui Titulus:* Horologium Thaumanticum, *desumta. Est Horologii genus, quod ideo Thaumanticum appellatum, propter Iridem artificialem, aut arcum cœlestem, quæ in conclavi expansa, diversas ibi horas designat, signa idem zodiaci, gradus altitudinis & omnia quæ notare in Horologiis possumus, cum aliis particularitatibus tantò curiosioribus, quanto magis huic horologiorum generi peculiares sunt, cum nihil adhuc iis simile in lucem ediderint vel exactissimè has res pertractantes. Quôvis momentô cognoscuntur in iisdem loca terræ solis lucem habentia vel noctis tenebris immersa. Uno statim intuitu oculi loca illa videntur ubi Sol actu*

*oritur*

*oritur vel occidit. Regiones inibi notantur longissimâ die & etiam nocte longissimâ gaudentes; loca ista ubi perpetua nox aut dies continuus, secundum Polos distinguuntur; horæ item Italicæ & Babylonicæ, magnitudo crepusculorum, longitudo diei vel noctis. Novæ hæ horæ tam ingeniose Lugduni inventæ unicâ linea ibi repræsentantur. Signa ascendentia & descendentia, Domus cœlestes & reliqua adeo quæ turbarent communia horologia, hic absque confusione & tanto ordine videntur, ut adspectus ipse satis jucundus.*

*Occasione hujus horologii, quod antea nondum apparuerat, aliud describitur, affinitatem magnam cum hocce habens, & quod in globo describitur, ubi absque stylo ullo umbra globi ipsa omnia ista notat, quæ in hoc horologia thaumantico videntur:*

*tur: ita ut quicquid per confine umbræ & lucis sit, totum globum dividens; hoc in altero per arcum cœlestem conclave intrantem & illud dividentem efficitur.*

*Quoniam talis artificialis arcus cœlestis quædam admiranda habeat, in id incubuimus in hoc libro, ut daremus media aliquot eum conficiendi; Forte & isti qui Dioptricam amant hic quædam offendent, quæ erunt ipsorum palati, aut ad minimum eosdem excitabunt, ut inquirant in ea, quæ jam deteguntur, quo ea, quæ hic incboantur quæque magni sunt usus, magis magisque perficiant. Tandem in hoc libro medium proponitur focos sectionum conicarum inveniendi, describendis arcubus signorum in horologiis inserviens. Dudum jam has lineas ope certe fili describendi inventio*

*tio cognita; sed inventum hoc in describendis horologiis admodum utile, inutile hactenus in praxi fuit, ob permagnam difficultatem focos inveniendi, h. e. puncta ubi filum alligandum: sic ut signa citius methodo ordinariâ describi possent, licet longâ quam vel calculo, vel alia operatione punctum horum focorum inveniri. Propositio ergo generalis hic datur, & geometrica demonstratio, quâ mediante facillimè foci hi in quavis sectione reperiuntur, cum non nisi duæ lineæ parallelæ ad duas alias jam datas ducendæ, veniant.*



# Machinæ duæ ad conficienda horologia facillimo negotio.

## *Descriptio primæ Machinæ.*

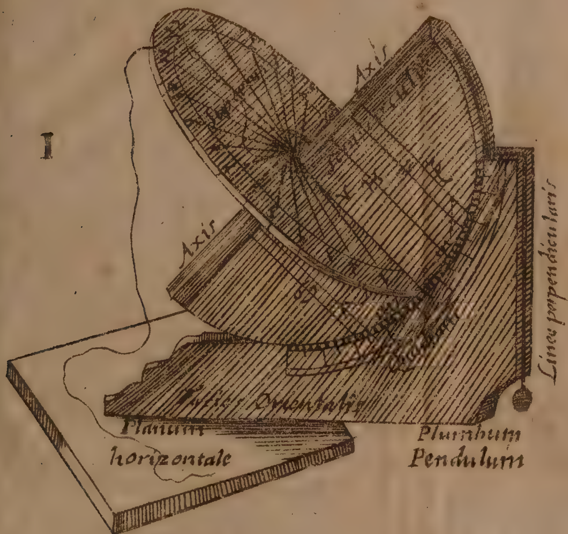
I.

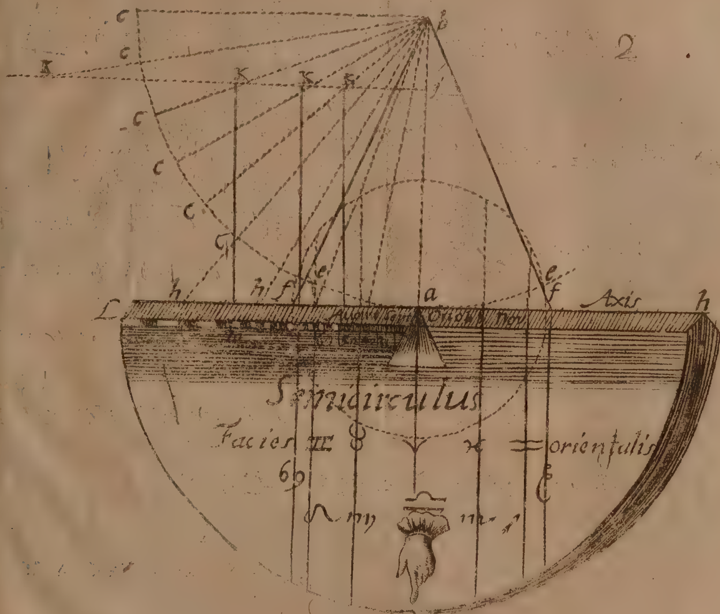
*Vide Fig. primam.* PRima hæc machina ex ligno conficitur, licet melius ex orichalco aut aliô molliori metallô conficiatur. Tres habet partes principales. Prima est pene quadrata tabula satis spissa & bene complanata; *planum horizontale* appellamus, quoniam in praxi horizontaliter sive ad regulam ponendum.

2. Ad angulum hujus Plani datur fibula quædam benè tornata, in qua secunda pars, quam *Planum Meridionale* vocamus, quod in fibula sicut axi verti debet, ita ut semper cum horizontali plano ad angulum rectum consistat.

3 In latere hujus *Plani* plumbum, regulæ vicem subiens.

4. Planum hoc idem duabus constat partibus; ultima *Quadrans* vocatur


I
Axis
Axis
Linea perpendicularis
Planum
horizontale
Plumbum
Pendulum


2
b
c
c
K
K
K
K
c
c
c
c
G
h
h
f
e
e
f
a
L
Axis
h
Semicirculus
Facies
orientalis

catur, quoniam quarta pars circuli in nonaginta gradus divisa; Altera *semicirculus* est, ita quadranti applicatus, ut inclinando verti possit, quo velis. Diameter hujus semicirculi vocatur *Axis*; & centrum simpliciter instrumenti *centrum*, sicut filum inde oriens vocatur *filum centri*.

5. Tertia pars circulus est viginti quatuor æqualibus constans partibus, quarum quævis in duas vel quatuor alias dividi potest. Circulus hic ita plano meridionali jungitur, ut semper cum eo angulos rectos constituat, licet locum mutare & diversas situationes recipere possit; Una facies circuli *superior* dicitur, *inferior* altera.

6. In semicirculo videntur menses certo modo notati. Qui non nisi praxin observant, non multum laboris impendant, ut noscant, quomodo signa hæc aut menses notaverim, quoniam instrumenta perfecta invenientes & signata, iis uti possunt ad facienda horologia, secundum usum in sequentibus explicandum.

7. Qui vero adhuc instrumenta ipsi signare cupiunt, hoc uti possunt modo. In axem *a b* ducitur perpendicularis *a b* æqualis semidiametro cir- *Fig. 2.*

 culi,

culi. Ex *b* tanquam centro circulus fiat *a e*. Ab utraque parte ex *a* ad *e* viginti tres gradus 30. sumantur, Duc jam rectas lineas *b e*, *b e*, axem secantes in *f*, *f*, & habebis in duobus hisce punctis *f*, *f*, loca duorum tropicorum, ubi notes signa *cancri* & *capricorni*. Posthæc ex centro *a* ducatur circulus *a f*, qui dividatur in duodecim æquales partes, & ducantur lineæ parallelæ per divisiones oppositas, quibus reliqua zodiaci signa notantur in axe, uti videmus in figura. Utilius autrm videtur menses inscribere axi sicut signis respondent. Sex ex iisdem lateri orientali & occidentali totidem inscribenda. Signa ipsa inferius aliquantum in semicirculi facie poni possunt.

8. Supra axem, gradus notantur servientes ad describenda almicantarata in Quadrante, eaque ita notantur. Circulus *a c* in gradus suos dividitur, per singulos, aut decimum saltem quemcunque lineæ ex *b* ducuntur, quæ axem in *bb* dividunt; ita ut distantiis *ab*, *ab*, paulo inferius transportatis gradus descripti sint usque ad 44. aut 45. cum semicirculus non plures continere possit. Sed si *i* k axi parallela ducatur, ita ut *i b* sit quarta

Fig. 4.

pars

3

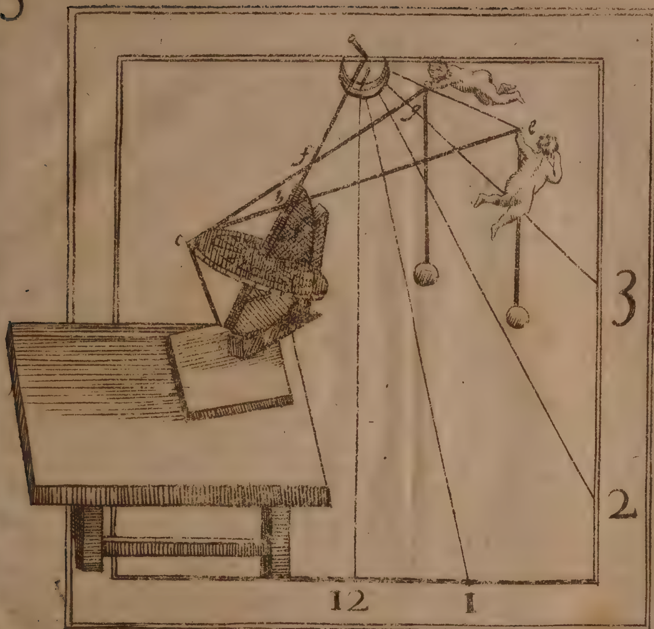




*Fig. 4.*

pars lineæ *a b*, diſtantiæ *i* k, *i* k in lineam *l l* transferri poſſunt, per parallelas k *l*, k *l*; & ita gradus habebis 70. & amplius. Commodum eſt ponere gradus minores in orientalem partem ſemicirculi & majores in occidentalem.

---

## *Uſus primæ Machinæ*
## PROBLEMA I.
### *Horologium ſolare in quavis ſuperficie deſcribere.*

I.

Pone tabulam firmam & immobilem ad murum, aut aliam ſuperficiem, cui horologium inſcribendum, ita ut ſpatium aliquod ſuperſit inter ſuperficiem hanc & tabulam, fermè magnitudinem ſtyli futuri adæquans. In limbo tabulæ *Planum horizontale* inſtrumenti perpendiculariter ponatur, quod ope plumbi in *plano meridionali* efficitur. Nam ſi plumbum ſemper ad normam deſcendere vides in linea tergo plani meridionalis inſcripta, dum planum hoc quaqua verſum volveris, planum horizontale perpendiculare eſſe, certus eſſe potes. Sed ſi plum- *Fig.* 1.

K 6 bum

bum lineam transgreditur, id indicio est, planum in illam partem vergere, itaque levare illud & probe firmare oportet, quando ad normam componitur.

2. Pone Semicirculum super quadrante suo, ita ut parvus index qui est in medio peripheriæ, respondeat gradui elevationis poli sicuti gradus in Quadrante notati sunt. Postea pone *Circulum* super *Plano meridionali*, ita ut una superficierum suarum *centrum* tangat, attamen non tegat. Observandum autem in sex mensibus brevium dierum, *Superficiem superiorem* tangere debere centrum, in reliquis autem *inferiorem*; insuper circulus hic ita ponendus, ut cum axe rectum constituat angulum; quod fiet, si circuli superficies in eadem linea cum linea *Arietis* & *Libræ* est in semicirculo.

3. Sole splendente, verte in fibula sua Plenum meridionale cum Circulo suo, ita ut membra circuli præcisè cadat in axe super gradum signi aut super piem mensis iu quo sumus illo ipso die, quo operatio instituitur; & si ponatur instrumentum, uti debet poni, tunc *Planum* Meridionale resoondebit meridiano

cœlesti

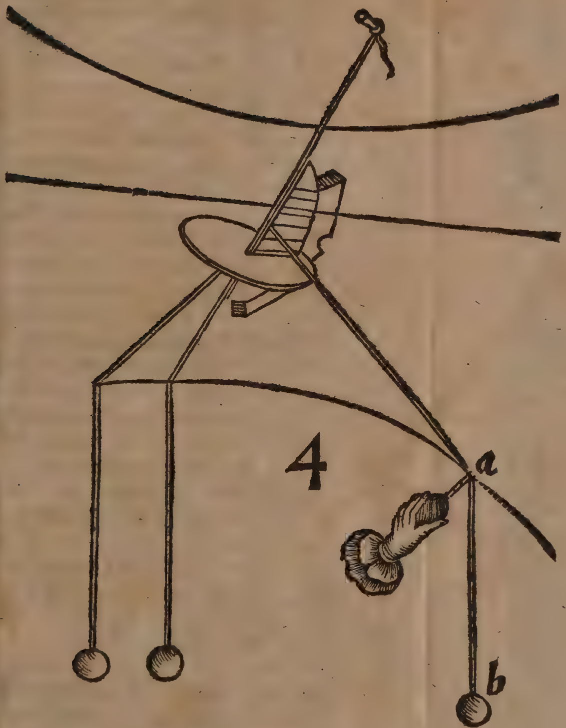
cœlestis, *Axis* axi, *Circulus* æquatori.

4. Extende per totum axem *filum centri* donec murum attingat recta linea, sive superne versus polum arcticum, sive inferne ad Antarcticum. Punctum muri, quod filum ita extensum attinget, erit centrum horologii, in illudque omnes horarum lineæ desinent, sive id in ipsa figura sit, qua horologium sit circumscriptum, aut longius ab ea recedat. Insuper, filum hoc ita extensum situm styli denotabit, aut acus horologii. Si enim virgam ferream muri eodem loco applicas & eodem situ, ubi est filum hoc, virga hæc inserviet loco styli & umbra sua denotabit horas. Si stylus iste longiori intervallo vergat in murum sicut sæpius accidit, nimis difficile imo impossibile erit tam longam affingere virgam; & in hoc casu sufficit alium adhibere stylum, cujus finis s. extremum tangat axem aut filum per axem extensum, in aliquo saltim loco. Huic etiam stylo figura quævis dari potest, e. gr. Serpentis, Avis &c. Modo enim rostrum aut extremum ejus tangat filum, umbra ejus extremitate sua denotabit horam.

5. Horæ diverſimode notantur. Prima hæc eſt ratio; inſtrumento ſic poſito, accipe filum centri & extende illud, ita ut tranſeat per ſingulas horas circuli, gradatim; & deſigna in muro puncta, ubi filum ita expanſum, quamlibet horam tranſiens definit. Nam ducta linea e centro Horologii (quod eſt punctum muri ubi filum per axem tranſiens definit,) per ſingula puncta, lineæ omnium horarum ductæ erunt, & per conſequens totum horologium perfectum. Si centrum vero nimis longe in murum abit, aut plane non, ſicut accidere poteſt, utere. - -

6. Secunda ratione. Inſtrumento poſito ſicut ſupra accipe aliud filum, quod extremo axis *i* adſtringas, duc illud per horam quandam circuli e. g. *r*, replica illud extendendo per axem aut ſuper filum axi ſuperintenſum, ita ut filum hoc *c* bene expanſum, ſimpliciter axem tangat, aut filum means per axem, in *b*, & deinceps in *f*, aut alio quovis loco, & ut puncta ubi filum ita extenſum definit in muro ſint *g* & *e*. Tunc ſolum ducatur linea *g e*, quæ erit hora denotata in *c*. Hora hac ita notata *c*, pone filum de loco *c* in aliam horam, & ſimili operatione

*ad pag. 231.*





tione omnes horas Horologii notabis.

7. Tertius modus noctu fit. Pone candelam ita ut umbra axis meet per horam quandam circuli. Tunc umbra axis ejusdem aut fili per axem extensi, eandem horam in muro denotabit, & nonnisi creta ducatur per umbram hanc necesse est. Posthæc transponens lumen, ita ut umbra per aliam horam eat, eodem modo in muro notabis eam. Et sic in reliquis.

8. Quarta interdiu ad solem efficitur, ope speculi, ita locandi, ut umbra axis eat per horam quandam circuli; tunc enim eadem hora in muro lineam horæ hujus describit. Ultimæ hæ duæ rationes sunt excellentes, inprimis si locus horologio destinatus non satis planus.

## PROBLEMA II.

### *Signa Zodiaci & Festa anni designare.*

I.

Linque instrumentum in situ suō, tende filum centri per superficiem circuli, & filum hoc in diversis punctis muri desinens, ibi lineam

æqui-

æquinoctialem notabit, ubi esse debent signa *Arietis* & *Libræ*, postea pone circulum in signum *Cancri*, (semper ad angulum rectum cum axe) extende jam filum centri, successive illud transire faciens circumferentiam circuli; & hoc modo signum *cancri* in muro denotabis, si deinceps circulum super quodvis signnm ordine pones, simili modo omnia Zodiaci signa notabis.

2. Ita si circulum ponas in diem mensis in quo est Festum aliquod immobile, e. g. 15. Aug. 24. Junii, aut alium, eodem modo in muro describes lineam, trahens filum circa peripheriam circuli, & umbra styli in lineam hanc cadet, toto die hujus festi.

3. Ut autem in muro diversa puncta commodius describi possint, in quæ desinit filum, utile erit adhibere acum ex orichalco, argento aut ebore aut alia molli materia confectam & per foramen *a* hujus acus ducere filum, donec plumbum extremo fili *b* appensum, illud semper extensum teneat. Tunc enim facile movebitur filum, & certius notabuntur in muro tot puncta quot velis.

PRO-

## PROBLEMA III.

### *Signare Azimuta & Almicantarata.*

I.

Quadrantem linque in situ suo, & verte semicirculum, ita ut axis ejus erectus sit versus punctum verticale. Applica jam circulum quocunque loco libuerit, modo ad angulum rectum, & notabis Azimuta eodem modo ac horas, cum axis inclinatus esset. Nam filum in quemvis gradum circuli aut decimum vel decimum quintum quemcunque ponens, & per axem ducens, diversa puncta in muro denotabis, ubi filum definet.

2. Quoad Almicantarata, pone circulum in gradum quendam lineæ *l*, sub axe, e. g. in decimum, duc jam filum centri circa perimetrum uti dixi in signandis arcubus signorum, & hoc modo lineam curvam in muro notabis, quæ erit Almicantaratum, vel gradus elevationis super Horizontem, qui est notatus in loco ubi circulus positus est, id est decimus. Et quando extremum umbræ cadet, in hanc lineam, hoc denotabit Solem tunc super Horizontem elevatum

tum esse decem gradibus; postea pone circulum in 20. & 30 gradum, & reliquos, & ita omnia Almicantarata describes usque ad 45. gradus ferme. Sed ad describenda illa quæ sunt ultra 45. alio parvo circulo opus est, qui quartam saltim partem hujus circuli adæquet, & qui etiam jungi possit semicirculo Nam hunc circulum parvum in parvos gradus ponens, denotare poteris in muro ad 70 gradus, quod omnino sufficere potest, cum Sol nunquam tam alte adscendat in Europa.

## PROBLEMA IV.

### *Denotare Domus cœlestes.*

DEprime semicirculum, ita ut plane decumbat & axis Horizontalis sit. Pone circulum in Medio, eumque inclina, ita ut una superficie tangente centrum, circumferentia respondeat gradui elevationis Poli, in Quadrante. Tunc tende filum juxta axem usque ad murum, & habebis centrum, ubi omnes lineæ domuum cœlestium se inter secabunt. Si deinceps filum tenditur per horas, quæ numero pari constant in circulo, 8, 10, 12, 2, 4, 6,

de-

describes domus cœlestes eodem modo quo horas astronomicas descripsimus.

## PROBLEMA. V.

### *Horas Italicas, Babylonicas & Judaicas describere.*

1.

TRopicis & Æquatore secundum probl. II. notatis, non multum difficultatis occurrit in his horis describendis, quoniam quælibet earum Æquatorem transit in eodem puncto, cum hora astronomica, ita ut ibi jam punctum sit ad quamlibet horam pertinens & aliud tantum restet quærendum, quod sit in alterutro tropicorum, hoc modo.

2. Linea horizontalis inter Tropicos, a parte orientis est 24ta hora Italica & a parte occidentis 24ta Babylonica: & utrinque eadem horizontalis, est 12ma Judæorum. Si itaque capias locum tropici cujusdam, ubi Horizontem secet & numeres in eodem tropico horas singulas, habebis ibi punctum pro qualibet hora Italica & Babylonica. E. g. observans, Horizontem, secare tropicum *Cancri* circa hora vespertinam septimam & tres quadrantes cape punctum in hora

præ-

præcedenti, i. e. in 6. & tertia quadrante, & hoc erit punctum, quod permeabit 23a hora Italica; ducens igitur ab hoc puncto lineam versus punctum Æquatoris, ubi 5ta hora astronomica est, habebis totam lineam 32æ horæ Italicæ. Deinceps duc aliam lineam a puncto 5tæ horæ & tertii quadrantis tropici hujus ad quartam horam æquatoris, hæc dabit 22am horam Italicam &c.

3. Eodem modo advertens, horizontem a parte occidentis circa quartam & quadrantem, secare Tropicum, accipies horam sequentem in eodem tropico, h. e. 5. & quadr. & ab hac ad 7am Æquatoris lineam duces quæ erit prima Babylonica. Deinceps linea a 6 cum quadr. tropici usque ad 8 Æquatoris ducta erit secunda Babylonica &c.

4. Si Horizon tropicos non secat ad orientem, aut occidentem, scias tantummodo horam ortus, & occasus Solis Diei longissimi & brevissimi totius anni. E. g. cum scias solem oriri die brevissimo hora septima & $\frac{3}{4}$, duces modo lineas horarum babylonicarum per $6\frac{3}{4}$, $5\frac{3}{4}$, $4\frac{3}{4}$, $3\frac{3}{4}$, &c. ho-

ra-

rarum tropici *Capricorni*, & 7, 8, 9, 10. &c. Æquatoris; aut ſi ſcis ſolem oriri circa $4\frac{1}{4}$ die longiſſimo, duc lineas a $5\frac{1}{4}$, $6\frac{1}{4}$, $7\frac{1}{4}$, $8\frac{1}{4}$, &c. Tropici *Cancri* per 7, 8, 9, 10, &c. Æquatoris, & habebis easdem horas babylonicas.

5. Similiter ſciens ſolem occidere die longiſſimo circa $7\frac{3}{4}$, duc lineas a $6\frac{3}{4}$, $5\frac{3}{4}$, $4\frac{3}{4}$, $3\frac{3}{4}$, &c. Tropici *Cancri* per 5, 4, 3, 2, &c. Æquatoris & habebis horas Italicas.

6. Quoad Judaicas, divide in ſex partes æquales horas, quæ ſunt poſt meridiem ad ſolis occaſum vel ortum, hoc eſt ad horizontem usque, in uno Tropico, & a qualibet harum partium duc lineas per quamvis horam Æquatoris, & habebis Judaicas: ita ut linea meridionalis ſemper ſit 6ta hora Judæorum, & quæ tranſit per primam Æquatoris, ſit 7ma Judæorum &c.

## *Notæ.*

1. Si in Horologiis contenti ſumus deſignaſſe ſolas horas aſtronomicas, qualemcunque adhibere licet

ſtylum

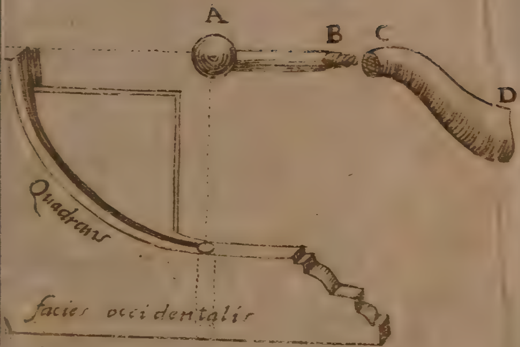
ſtylum modo ejus extremum tangat aliquot punctum axis. Sed dum ſigna Zodiaci, aut alii circuli adduntur, neceſſe eſt, extremum ſtyli reſpondere præciſe centro inſtrumenti.

2 Nimis ſæpe incommodi eſt, tanta exſtruere tabulata, & adeo firma, ut ei tabula imponi poſſit, inſtrumentumque ibi teneri immobile. Melius ergo longe eſt, pandere linteum Pictorum, aut chartam magnam in imo muri, in quo Horologium deſcribendum & in hoc panno pro lubitu operari. Horologium enim in hoc panno conſcriptum, transportari poteſt, ex ſcala quadam, in ſummum muri inque locum a murariis præparatum; applicando itaque illud in eodem ſitu, quo erat infra murum, penicillo quodam omnes horæ & arcus, ita ut in panno ductæ apparent, pingi poſſun. Præprimis vero bene obſervanda diſpoſitio ſtyli prout eam determinavit inſtrumentum in panno.

## PROBLEMA VI.

### *Horologium reflexionis in cubiculo facere.*

Optima


A
B
C
D
Quadrans
facies occidentalis

1.

Pulcherrima horologia ſunt horologia reflexionis. In feneſtra parvum ſpeculum ponitur, quod radium in conclave reflectit, accipiendo lumen a ſole, ita ut radius iſte locum mutans ſecundum ſolis progreſſum, denotet omnes horas pictas in conclavi. Hoc genus horologiorum noſtro inſtrumento ſic efficitur;

2. Pone inſtrumentum in feneſtra, ferme ad locum ubi parvum ſpeculum eſſe debet; loca illud in meridianum ſuum more ſolito, ſecundum allata Probl. I. n. 3 & poſteaquam ita inveneris ſitum meridionalem, verte planum meridionale cum ſuo circulo, ita ut ſummum axis, non polum borealem, ſed Meridiem reſpiciat. Deinceps operabis in conclavi eodem modo quem præſcripſi in aliis horologiis in muro conficiendis.

3. Si nonniſi horas aſtronomicas cupis, ſpeculum horizontale eſſe debet, ita ut in puncto, quodcunque illud fuerit, axem tangat, ubi filum per axem extenditur. Si vero ſigna & alios circulos cupis, ſpeculum eo

loco

loco positum esse oportet, ubi centrum instrumenti fuit.

## PROBLEMA VII.

### *Omni momento horam & altitudinem Poli Regionis invenire ubi degis.*

ADde acum magneticam instrumento, hujus ope Planum meridionale vero meridiano loci super imponi poterit. Postea circulo centro imposito, eleva aut inclina semicirculum, qui portet etiam circulum, donec peripheriæ umbra directe super diem in axe cadat. Tunc parva manus, quæ est in medio limbi semicirculi indicabit altitudinem Poli in gradibus Quadrantis, & eodem tempore umbra axis denotabit horam in circulo; nisi quod crassities Plani meridionalis impedimentum quoddam a nona ad tertiam horam efficiat.

### *Nota.*

INstrumentum hoc ex orichalco factum absque dubio commodissimum

mum erit quoniam loco plani horizontalis virga ferrea ipsi addi potest, ope cujus instrumentum stylo Horologii alligari potest, qui stylus quam firmissime muro affigi debet. Hoc in casu autem stylus ex 2 partibus compositus esse debet, ita ut pars A B a parte C D vel prorsus, vel aliquo saltem intervallo mediante cochleâ removeri possit. Si horologium conficere vis, quadrantem instrumenti absque circulo suo & semicirculo ponas oportet, ita ut centrum respondeat directè extremo styli A, & præterea quadrans circumvolvi possit in fibula sua, dum semper verticalis vel horizonti perpendicularis manet. Tunc aufer styli extremum, & junge semicirculum & circulum quadranti instrumenti, quod jam verti potest quaquaversum, non amplius impeditum stylô, propter ablatum caput styli. Sic volvitur, Sole splendente, ad orientem, & secundum dicta Probl. I. n. 3. seqq. operatio instituitur. Horologiô confectô instrumentum aufertur & caput styli in locum suum restituitur.

*Descriptio secundæ Machinæ.*

I. Machina hæc est certa Lucerna,

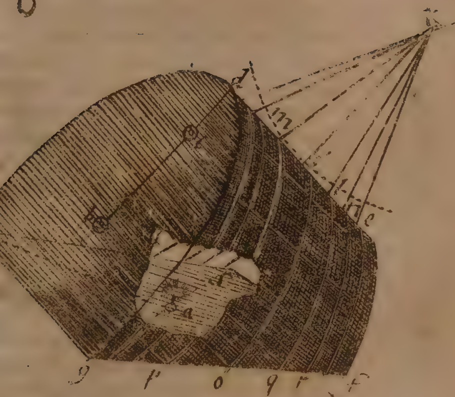
ex ferro albo vel chartâ densiore constans, sub cylindri formâ, (Vide Fig 6:) *g b d* est lamina circularis, vel magnum circuli segmentum, sicut & lamina opposita *f e* quæ est segmentum parvum, ita ut hæc duo segmenta sibi addita circulum totum constituant. Punctum *b* est centrum circuli *g b d*, per quod axis cylindri transit; *g b f f* est lamina, cujus medio foramen *a*, centrum instrumenti, inest. Arcus *i o*, *m p*, *l q*, &c. sunt arcus signorum. Lineæ rectæ parallelæ sunt horæ. Omnes hæ lineæ hoc modo signantur.

2. Totus circulus cylindri, h. e. peripheria *g b d*, in 24. partes dividitur æquales, & inde parallelæ ducuntur, quæ sunt horæ, ita ut linea per altissimum punctum *d* & *e* transiens horam duodecimam s. meridiei denotet.

3. In medio semicirculus *i o* circa cylindrum ducitur, qui erit Æquator. Perpendicularis *i k* semidiametro *b d* æqualis ducitur Ex *k* tanquam centro circulus describitur, in cujus utraque parte accipiuntur 23. gradus 30.; & per hunc gradum ductis lineis *k a*, *k e* in meridiano habebis puncta, per quæ circuli Æquato-

ri

6



ri paralleli ducendi, qui erunt Tropici; posthæc facilè puncta reliquorum signorum inveniuntur, secundum praxin datam n. 7. descriptionis primæ machinæ.

4. Utile quidem, sed non absolutè necessarium est, ut semicirculus Æquatoris præcisè terminetur per inferiorem laminam, eo loco, ubi Æquator lineam sextæ horæ secat, & ut lamina eadem cum plano Æquatoris angulum regionis, ubi degimus, constituat. Hoc enim modo lamina ista erit Horizon.

*Usus Machinæ secundæ.*

1. In lapide fenestræ excava fossulam rotundam magnitudine semisphælerum adæquantem, ut ibi ponas speculum; aut cura confici thecam ferream cum pede infernè, qui lapidi immitti possit, & ibi ferruminari plumbô.

2. Accipe jam lineam meridianam, quæ per hunc locum transit, quod a meridie, sole splendente, facillime fit. Nam si teneas plumbum filo appensum in altera parte fenestræ, ita ut umbra fili transeat per fossam excavatam, umbra hæc erit linea meridiana. Commodius adhuc filum ita expansum linqui & in eodem situ firmari potest.

3. Noctu lampadem parvam in fossula colloca, ita ut flamma tenuis sed clara in ipso loco speculi existat.

4. Huic impone Machinam, ita ut flamma lampadis rectè foramini *a* insistat, quod est centrum,& eodem tempore radius per foramen axis *b* means, respondeat filo extenso, aut cuivis alii parti, ubi linea meridiana fuerit. Verbo, oportet Machinam hanc orientalem esse, & ita positam, ut axis verum meridianum loci respiciat.

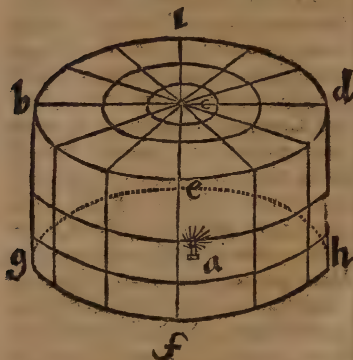
5. Tunc radius lampadis omnia Lucernæ foramina transiens, fideliter totum horologium in conclavi denotabit, ita ut certò omnia pro commodo tuo depingere possis.

6. Deinceps speculum sume & huic fossæ immitte,ita ut una vice & horam & signum diei notet & momenti,quod aliunde per aliud quoddam horologium cognosci debet. Et quando vitrum ita positum, mastige firmandum est in hoc situ, aut potius coloribus crassioribus, humectatis oleô nucum quales colores pictores ad deaurandum adhibent,qui benè siccantur, & mirè rem continent, pluviæ & calori resistentes.

7. Un-

7. Unum commodorum hujus instrumenti est quod verti possit, quocunque libuerit, ut lineæ horarum, & totum horologium cadant in locum conclavis aptissimum ad eas recipiendas. Cum juxta vulgarem & communem methodum cogamur semper horas ad certum dirigere locum, secundum meridianum, & sæpissimè accidet, ut locus hic sit minus commodus, & ut horæ per trabes aut alia loca irregularia transeant. Ope autem hujus Machinæ horas quo velis, cadere facies. Modo enim radius *b* cadat in punctum aliquod lineæ meridianæ, h. e modo axis cylindri sit in plano meridionali, instrumentum erigi aut inclinari potest, ad orientem vel occidentem verti, prout commodum videbitur. Posset quidem etiam disponi, ut radius *b* non transiret per meridianam lineam, sed tunc plus difficultatis aderit in locatione.

8. Simili Machinâ Azimuta & Almicantarata notari possunt. Si enim adhibeas aliam lucernam instar tympani (2. fig.) & ita ponas ut flammâ lampadis in centro *a* existente, radius *c* respondeat puncto verticali Horologii, (quod punctum alterô instrumentô invenitur, dum




mus in tabula punctum ubi radius e ejus instrumenti Fig 1. definit) tunc rad i per circulos parallelos transeuntes in conclavi denotabunt Almicantarata, sic ut *g f b* sit horizon; lineæ vero transversales, & deorsum cadentes, denotabunt azimuta, modo lucerna hæc ita locata sit, ut radii pertranseuntes unam harum linearum cadant in Meridiana in conclavi designatam. Eodem modo & meridiani diversarum regionum, circuli latitudinis, & tota Geographia signari possunt.

9 Incommodum, quod experimur lampadem adhibentes, hoc est, quod lumen

lumen illud nimis debile fit, ut omnia in pariete vel tabulato vix bene discerni possint, si conclave magnum est, ideo utendum radiis solaribus ope speculi; quod ita fit.

10. I, Initio affige speculum parvum loco suo, 2. si Sol in illud splendorem mittit, denota tria aut quatuor loca, in quæ radius reflexus cadit tribus diversis horis, in conclavi. Consultum est, ut hoc facias eo die, quo sol in aliquod signum intrat; & minimum una harum operationum fieri debet cum scimus horam certam instare, e. g. duodecimam, decimam, tertiam cum dimidio, &c. 3. Loca instrumentum, ita ut centrum ejus præcise respondeat parvo speculo. 4. Adhibe quatuor aut 5 specula satis magna, (concava meliora sunt) & ita eadem dispone, ut radios a sole receptos reflectant in parvum speculum, quod eos ex parte sua reflectet in peripheriam Laternæ, qui foramina ibi invenientes, in conclave cadent, & satis vivaciter lineas Horarias & signorum denotabunt. 5. Sed cum videmus radios hosce ita laternam transire, illa sic disponenda est, ut radii signum diei percurrentes, in quo tria aut quatuor puncta

cta notavimus, præcise respondeant etiam hisce punctis, & ut eodem tempore radii horæ incidant etiam in punctum tum annotatum, cum ista hora esset.

11. Hoc instrumentum in primis aptum ad conficienda Horologia in muris & alibi; Sed in hunc finem minus sit oportet, & etiam levius quam ad horologia reflexionis; adhæc, oportet invenire medium, illud stylo jam muro infixo affigendi, ita ut caput styli in centro instrumenti reperiatur, quod non adeo difficile factu est. Insuper ita locandum est, ut radii solares, per rimam horæ duodecimæ transeuntes, respondeant lineæ meridianæ jam muro inscriptæ, & ut eodem tempore radii signi etiam tribus aut quatuor punctis respondeant, quæ in die signi illius notata erant. Si sol non cadit a meridie in murum, utendum aliquo alio puncto alia quadam hora notato, de qua certi sumus facti vel per aliud horologium vel alia via.

12. Notandum quod dum conficimus horologium Reflexionis, instrumentum ita ponendum sit ut tergum confidat superne, ipsum in-

ſtrumentum vero ita verti poſſit, ut axis & foramen *b* meridiem reſpiciant, non ſeptentrionem aut Polum. E contrario cum facimus horologia in muris, neceſſe eſt inſtrumentum tergum ſuum infra habeat, & axis vel punctum *b* directe Polum aſpiciat.

Facillimum eſt omnia hæc applicare horologiis per radios directos facientis, qui per foramen tranſirent, ut conclave quoddam intrent.



# ELEMENTA
# GEOMETRIÆ

*in quibus*

Methodo brevi ac facili ſumme neceſſaria ex Euclide, Archimede, Apollonio, & nobiliſſima veterum & recentiorum Geometrarum inventa traduntur

*per*

P. IGNAT. GASTON PARDIES,
S. J. Gallico Idiomate conſcripta

*Nunc vero*

IN VSVM STVDIOSÆ JUVENTVTIS latinitate donata.

EDITIO QVINTA.



*JENÆ,*
SVMPTIBVS GEORGII CHRIST. TROEBERT
MDCCXXI.

*VIRO ILLUSTRI*

# NICOL. CHRISTOPHORO LYNCKERO,

JCto, Hæreditario Domino in Kötschau, in Aula Saxo-Isenacensi & Regimine Tutelari Jenensi Consiliario Excellentissimo, Judicii Provincialis & Scabinatus Assessori, Collegii Juridici Seniori & Professori Primario, Academiæ Salanæ hodie

RECTORE MAGNIFICO,

*Patrono observantissime colendo*

perpetuam felicitatem!

*IGnosce homini ad Themidos sacraria proruenti. Gallus est, cui natura liberiorem indulsit*

*genium. Non tamen miles, qui Tuos turbaret circulos, sed mathematicus audit jamdudum doctorum volitans per ora virum. Hic postquam natale reliquit solum, mutato habitu, quod Jesuitis solenne est, Germaniam perlustrare constituit. Abhorret nihilominus eadem cum maleficis sede locari; cum patris non promittat funus neque principum inquirat in annos; sed mare & terram, numeroque carentem arenam metiri doceat. A me igitur, cui hactenus familiaris fuit, enixe petiit, ut Patronum conciliarem, sub cujus tutela exterus apud exteros securus vivere posset. Diu non deliberavi, sed magnificum nomen Tuum ad id exorandum esse dixi. Dictum. Factum! Quapro-*

propter in me converte iras, si quicquam in audendo peccatum fuit. Simul tamen reputa, summum Tuum favorem, quem sine ullis meæ tenuitatis axiomatibus per sola postulata novo plane ac singulari conamine mihi demonstrasti, primos subjecisse igniculos. His enim observantia mea excitata, hanc sibi legem latam putavit, etiam otii & partium noctis rationem Tibi soli reddere. In Gallia quidem Auctor Chinenses, Europæis populis si dIs placet oculatiores, imitatus operam suam omnibus Academiæ Regiæ membris, tanquam judicibus, obtulit: Nunc vero eadem defertur ad Academiæ nostræ caput, quia Te solum amplissimum laboris bujus theatrum esse existumavi. Suscipe igitur Vir Illustris

*ſtris ſerena fronte, quod animo devoto calidisque omnigenæ felicitatis votis offero, & futuris quoque temporibus perpetuum Nominis Tui cultorem benevolentiæ Tuæ radiis bea. Jenæ die 14. Martii cIɔ Iɔc LXXXIV.*

Illuſtri Nomini Tuo

devotiſſimus

INTERPRES.

L. B.

ELementa Geometriæ magna facilitate demonſtrata hic accipis. Poſſunt ea omne tædium, quod incipientibus ex prima Euclidis lectione oritur, pleniſſime tollere. Erubui ſæpius quando in explicatione Euclidis ab auditoribus mihi objiciebatur, cur hæc per ſe nota demonſtrantur, cur non breviori via id fit? &c. Cœpi igitur evolvere varios Euclidis commentatores, ſed alii prolixitate nimia, alii dum breves eſſe voluerant, obſcuritate laborabant, ad unum vero omnes ordini Euclideo ſtricte inhærebant. Tandem incidi in præſentem auctorem, cujus labor deſideriis incipientium ex aſſe ſatisfacere videtur. Abſit tamen, ut hoc ipſo Studioſæ Juventuti Euclidem è manibus excutiamus, aut quicquam ejus laudi detrahamus. Manebit illa ſemper illibata, quamdiu nomen mathematici eruditorum ordini inſertum erit. Viam potius planiorem reddet hæc opera, ut ad ipſa Euclidis adyta pervenire queamus. Hoc igitur cum noſtrum ſit propoſitum, interpretatio præſens æquum ſperabit judicem. Fateor regulas bonæ interpretationis geniumque linguæ Gallicæ non ſemper obſervatum fuiſſe. Et qui fieri aliter potuit, cum ſtans

quasi pede in uno & aliis quam plurimis districtus, unice in commodum quorundam DNN. Commilitonum eam absolverim. Si Deus majora nobis dederit otia, facile cuncta ad limam revocari poterunt. Ceterum Nicolai Mercatoris introductionem in Geometriam præmisit, & appendicis loco ex Logica sive Arte cogitandi subjeci cap. 9. part. IV. in quo defectus Geometrarum notantur, quia & illa & hec cum Auctoris nostri scopo maxumopere conveniunt. Vale & labori fave.



PRÆ-



# PRÆFATIO.

QVi conferent exiguam libelli hujusce molem cum inſcriptionis ſuæ magnitudine, primo fortè intuitu abſterrebuntur inæqualitate, quæ inter utramque eſt; & timendum eſt, ne illi omnia hæc promiſſa adeò eximia habeant pro verbis audacioribus hominis qui facilè ſuſcipiat quæ præſtare non poſſit: ſed hos ego rogatos velim, ſuſpendant paulùm judicium ſuum, ac conſiderent in præſentia nonniſi dimidium horum Elementorum dari, & de ſedecim libris, quibus illa abſolvi debent, nonniſi novem nunc publicari, quoniam reliqui, abſtruſiora atque eminentiora Geometriæ inventa explicantes, incipientibus hanc artem addiſcere non adeò neceſſarii ſunt. Interea in primis hiſce libris non omittuntur quæcunque pulcra habentur in quindecim libris Euclidis, & præterea quæ Archimedes de quadratura circuli demonſtravit & alia quædam ejusdem generis. Videbitis hîc mirabiles numerorum proprietates quas Euclides in ſeptimo, octavo & nono Elementorum ſuo-

rum demonstravit. Discetis hic demonstrationem *magnitudinum incommensurabilium*, quæ fortè maximus est conatus cujus capax sit humana mens, quoniam dum scrutatum abit usque ad possibilitatem rerum, tantâ cum claritate ac perspicuitate id quod est & quod non est detegit; & quod in infinita multitudine comparationum, quas omnes observat tanquam possibiles inter duas magnitudines, demonstrat immobili quadam certitudine, neque ipsum Deum videre earum unam aptam quam suppeditet ut communem mensuram duarum harum magnitudinum. Verumenimvero licet hæc demonstratio pulcra sit, fatendum tamen est, eam satis esse difficilem; ii quibus inventionem tantam debemus, non aliud nobis iter ostenderunt, quam quo ipsi fuerant usi, aut quod revera aliud non nossent, aut quod hac ratione voluerint partem laboris, quò defuncti fuerant nos quoque experiri & simul gustare tanto majori cum gaudio delicias novi hujus mundi, quanto majori cum labore eò pervenissemus. Quodcunque sit, hæc via adeo longa plenaque difficultatum est, ut pauci, qui aut constantiæ satis ad ferendum ejus tædium habeant, aut virium ad superandas molestias inveniantur. Nescio an ausim dicere me satis fuisse felicem in detegendo novo itinere. Nec tamen admodum

dum magnæ id mihi laudi foret: interdum audaculus nauta felicior eſt in nova quadam detectione, quam peritiſſimus navarchus, fortunaq; idem in tempeſtate reperire ſinit, quod nemo perfectiſſima, quæ de re nautica haberi poteſt, cognitione detegere potuiſſet. Sic etiam contingere potuiſſet ut vaſta hæc Geometriæ maria percurrens, forte quadam offendiſſem novum aliquod iter & magnis hominibus qui me præceſſerunt incognitum. Nihilominus bonam hanc fortunam mihi attribuere non ſtudeo; illud tamen minimum jure dicturus ſum, viam quam ego ingredior, iturus ad Incommenſurabiles, breviſſimam eſſe atque facilimam, ita ut exigua attentione, quæ quatuor aut quinque ſaltim parvarum pagellarum lectioni dicanda eſt, exactè aliquis comprehendere poſſit rem quam paucisſimi, etiam ex iis qui ſe Geometriæ penitus dedunt, intelligere queunt.

Poſthæc de diverſis progresſionum generibus ago, ac peculiariter duabus magis celebribus, quæ ſunt Geometrica & Arithmetica, inſiſto; easque inter ſe conferens Logarithmorum quoque tractationem ſuſcipio, eorumque artificium oſtendo mediante linea aliqua Geometrica, quæ admodum utilis erit ad reſolutionem Problematum Algebraicorum de omnis generis dimenſionibus. Hæc eſt illa linea quacum

olim quadrare potui Hyperbolen; & quod non ita pridem amicorum quidam in Diario sive Actis Eruditorum Angliæ de iis, quæ de hac materia à peritissimis Geometris publici juris facta sunt, ostendit, adeò me non occupavit, ut potius cogitationem mihi injecerit, eos noluisse omnia quæ de hac re dici possent, nobiscum communicare. Finio autem primam hanc partem praxi Geometrica; quæ deberet contineri ultimo demum Elementorum omnium libro. Præter operationes faciliores communioresque trado hic principia mensurandi magnitudines & distantias locorum inaccessibilium, conficiendi tabulas Topo- & Chorographicas; inveniendi sinus, tangentes & secantes omnium angulorum; ac tandem notitiam omnium eorum quæ ad hanc partem, quæ Geometria practica vocatur, pertinent.

Post hæc totidem libris tradam Algebram, Sectiones Conicas, Sphæricas, & Staticam; sed ante omnia quinque aut sex generales regulas stabiliam, è quibus deinceps, tanquam per corollaria, demonstratio infinitarum propositionum, quæ pro palmariis in Geometria habentur, trahitur. Inde natura invenietur & mensura spatiorum asymptoticorum, quorum cognitio res est omnium maxime admirabilis, & quæ clarissimè magnitudinem ac spiritualitatem animæ nostræ ostendit, siquidem hæc solo spiritus

ritus sui lumine ultra infinitum penetrans adeò clarè res, quas nulla sensuum experientia eam docere, nullaque corporea facultas percipere saltem potest, detegit. Spatia hæc sunt extensionis actu infinitæ, comprehensa inter duas lineas, quæ prolongatæ, in infinitum, non se unquam offendunt; unde ipsis nomen Asymptotorum est. Interim hic demonstratur, hæc spatia quoad longitudinem infinita, nihilominus circulo alicui aut alteri figuræ determinatæ æqualia esse: ita ut Infinitum ipsum, quam immensum & quam innumerabile etiam illud est, nihilo secius ad calculum atque mensuram Geometriæ reducatur, & anima nostra, major adhuc illo, id comprehendere queat. Ex omnibus naturalibus, quas homo propria ratiocinatione acquirere potest, notitiis sine dubio hæc Infiniti comprehensio maximè est admirabilis: neque quicquam ego aptius video quod de animæ nostræ existentia nos convincat, atque doceat, ultra materialem facultatem qua nobis res imaginamur medio organorum, esse nobis aliquam plane spiritualem ad cogitandum & ratiocinandum, quam omnium Philosophorum maximus *potentiam aliquam ab organis independentem, separatam à materia & aliunde quam à corpore venientem* appellat. Certè, quantascunq; etiam vires intendemus, ut nobis infinitum imaginemur, ad extre-

mum tamen ejus nunquam veniemus; & quamdiu in sola ejus imaginatione nos detinebimus, formare seu concipere quidem nobis poterimus spatium aliquod vastæ distensionis, illud tamen semper erit determinatum: siquidem cum imaginatio, ut propriè loquamur, corporea quædam sit potentia, quæ objecta non nisi per phantasmata ac species sensibiles nobis repræsentat, ea ipsa, instar corporis, in repræsentationibus suis determinata esse debet. Et quemadmodum tabula aliqua oculis nostris quandam extensionem actu infinitam subjicere nequit, quia id quod limitibus in certo aliquo spatio circumscriptum est id quod terminos nullos habet continere non potest; ita etiam imaginatio quæ nihil aliud est quam tabula repræsentans imagines revera satis subtiles, sed semper materiales, non nisi corporeas atque limitibus comprehensas res nobis ostendere potest, cum tota infiniti immensitas picturæ alicujus corporeæ terminis contineri nequeat. Imaginatio igitur eo usque non attingit, ut nobis infinitum repræsentet. Sed aliunde demonstratio quam de natura & proprietatibus immensæ hujus atq; infinitæ extensionis asymptoticæ instituimus, nos pariter omnes convincit, haberi intra nos facultatem, quæ idonea sit hanc infinitam extensionem nobis repræsentare. Quemadmodum enim

at

ut regula atque circino figuram in charta delineatam metiar, opus est me eam figuram præ oculis atque ad manus habere, quò instrumenta ad angulos ejus atque latera applicans, omnes ejus dimensiones sumere, & sic magnitudinem illius determinare possim; ita etiam ut rationis meæ regula mensuras spatii hujus asymptotici sumere queam, necesse est, ut ejus ideam aliquam intimè animo meo præsentem habeam; & ut idem animus, liceat ita loqui, huic ideæ atque interiori figuræ se applicans, ejus dimensiones accipiat, magnitudinem determinet, atque omnes ejus proprietates demonstret. Necessum itaque est ut agnoscamus claras & distinctas infinitæ alicujus extensionis ideas & repræsentationes nos in nobis habere, & per consequens eam facultatem quæ ita nobis repræsentat id quod corpus nullum repræsentare potest, esse potentiam quandam pure spiritualem & à materia distinctam: adeo ut Geometria unica quadam demonstratione simul aliquam maximè admirabilium naturæ proprietatum, eodemque tempore unam è duabus maximi momenti veritatibus Moralibus probet.

Audebone ulterius etiam progredi, & dicere in hac ipsa demonstratione invictum quoque argumentum existentiæ Dei reperiri? Novi equidem divinam naturam abyssum esse luminis, quod passim se dif-

fun-

fundit, & in cœcissimorum etiam atque stupidissimorum animis sese inserit: sed nec minus novi, quousque progressa sit Libertinorum impietas, qui cum propriæ ac internæ refutationi resistere, aut sibi ipsis respondere nequeant, extrinsecus tamen aliorum demonstrationes eludere, intricato negotio de æternitate se munientes, conantur; & in tuto se esse sub infinita hac causarum dependentium multitudine, ac refugii locum nunquam non invenire in æterna serie diversarum productionum arbitrantur. Verùm Geometria, manifesto quodam asymptotorum exemplo, invicto argumento demonstrat, quod etiam in hac ipsa, quam prætendunt, causarum subordinatarum & dependentium unius ab altera in infinitum serie necessario veniendum sit ad primam aliquam naturam, quæ cum omnibus his causis particularibus eum concurrat, omnibusque temporibus correspondeat, quoque ipsa sit infinita & æterna; & quæ licet non sola ullam illarum causarum sine concursu & determinatione aliarum producat, nihilominus generalis quæ res omnes producit conservatque, causa existat.

Fortè, post hæc omnia, nonnemo cogitabit me res hic in epitome solùm tradere, hancque Geometriam iis quidem, quibus jam cognita esset hæc scientia,

memorialis libelli loco futuram, non verò instituturam eos, qui eam addiscere cupiunt. Sed profiteor longè ab intentione mea hoc abesse, quæ nunquam fuit epitomen conficere: semper enim præ me tuli Geometriam conficere, quæ incipientibus inserviret, & ex qua illi etiam qui nunquam de Mathematicis rebus quicquam audivissent, brevi admodum tempore, non solum quod summè necessarium est in Geometria, sed subtiliora quoque addiscere possent. Non ignoro libros in hac materia brevissimos non esse clarissimos; atque in magno numero eorum, qui nobis lectionem atque cognitionem Euclidis faciliorem reddere voluere, plurimi satis ejus volumen minuerunt; propterea tamen non omne tempus quo ad eum intelligendum opus est, abbreviarunt.

Inter omnes Commentatores, maxime prolixus est, mea quidem opinione, Clavius, Pater Fournier verò brevissimus; nihilominus persvasum mihi est, longiori tempore opus esse ad mediocriter intelligendum Euclidem in Patre Fournier, quam in Clavio: adeò verum est, in Geometria studii, ac laborum tempus non magnitudine aut parvitate voluminis metiendam esse. Itaque in instituto, quod erat, medium Scientiam hanc cum maxima qua posset facilitate addiscendi tradere, non tàm in-

scri-

ſcriptis brevis eſſe, quàm ut in modo procedendi facile intelligerer ſtudui; ſique hic libellus exiguus admodum apparet, non tàm illud brevitati demonſtrationum particularium adſcribendum erit, quam methodi generalis facilitati. Notandum enim eſt inter ea, quæ difficilem ac tædioſam Euclidis & vulgarium Autorum lectionem faciunt eſſe & illud, quod dum in ſummo illo rigore, quo nihil quod demonſtrari poſſit, quàm facile aliàs etiam appareat, ſine demonſtratione abire ſinunt, ſæpè accidit ut quod clarum fuiſſet, ſi animo id quale naturaliter videbatur propoſuiſſe ſatis habuiſſemus, poſtea difficile ac intricatum evadat, quando ad demonſtrationem regularem id reducere volumus. Imò & hoc obſervabis in Euclide, ut demonſtret propoſitionem aliquam magni momenti, longam adhibere propoſitionum ſeriem, quæ propriè nulli ſunt uſui quam ad probandam principalem hanc propoſitionem. Si itaque ſola explicatione ut veritas perſpiciatur efficere poſſumus, absque eo ut laboremus demonſtrare id de quo plenè convicti ſumus, & ſermones inſumamus, qui non videntur aliud facere, quam nos dedocere id quod ignorare non poſſumus, labore hoc certè ſuperſedebimus. Pari modo, ſi una vice omnes hæ principales atque magni momenti propoſitiones, absque

que adhibita longa illa demonſtrationum ſerie, tantisque apparatibus, demonſtrari poſſunt, habebimus procul dubio medium res inutiles reſcindendi: atque hoc eſt illud, quod ego me pluribus in locis præſtitiſſe arbitror, dum in unica quadam propoſitione demonſtro, quod aliàs non niſi tædioſa illa aliarum propoſitionum ſerie probatum fuit. Aliud, quo uſus ſum, medium abbreviandi, eſt res ad generalia certa principia reducere; quod non in hoc ſolùm libro feci, ubi per quinque ſexve regulas univerſales ferme infinitum numerum palmariarum propoſitionum demonſtro, ſed in multis aliis etiam locis, veluti quando de Sectionibus Conicis agens, quatuor illarum proprietates per unam proprietatum, quæ unicæ alicui ſectioni peculiaris eſt, demonſtro. E g. eas omnes ſub proprietatibus Ellipſeos conſiderans, dico Circulum eſſe ellipſin, cujus duo foci ſe tangunt; Parabolam eſſe ellipſin, cujus duo foci ſunt in infinitum à ſe invicem diſtantes; & Hyperbolen eſſe ellipſin cujus foci magis quam infinitum diſtant: quod optime procedit ac bene percipi poteſt, velut illo in loco explico.

Nonneminem ſine dubio malê habebit quod conſuetam methodum definitiones, principia & propoſitiones collocandi deſeruerim; ac forſan ille me Geometriæ, ſub-

latis

latis illis, quæ ei semper dignitatem accuratissimæ scientiæ dederunt, injuriam facere creder. Alius quidam reprehendet, quod adhuc vetustos quosdam demonstrandi modos retinuerim, postquam moderni, per expolitam illam hujus in quo vivimus temporis rationem, demonstrationes multo *magis naturales* dederunt, atque differentiam, quæ est inter *illuminare animos* atque *eos convincere*, ostenderunt. Objicietur mihi porrò, quod in pluribus negligentior fuerim; quod multas propositiones absque quod eas demonstrem præterierim; quod sæpè loca, quæ non directè id quod in quæstione est probant, citem; quod indifferenter *Conversa* & propositione ipsa utar. Ad hæc omnia verbo uno respondeo, me, cum Geometriam cum omni qua fieri posset facilitate docere instituissem, hanc viam, quam inftiti, maximè idoneam invenisse: quod non obstabit, quo minus bonas hominum harum rerum peritorum de me opiones lucrifaciam.

Interim animadverto, me dum omnimodam brevitatem hujus Opusculi promitto, nimis longum in Præfatione esse. Verumtamen non me detineo in ostendendis magnis Geometriæ utilitatibus; id solùm dico, eam si unquam in Scientiis naturalibus aut Artium praxi commodi quicquam attulit, nunc certe & his & illis summe esse

ne-

necessariam. Notum est quousq; seculo nostro artium perfectio prolata sit, & quantâ cum indagine res occultissimæ in Physica perpendantur. Eo modo quo his temporibus Physica docetur, Geometria æque ac Mechanica, quæ nihil aliud est quam Geometria ad motum localem applicata, necessaria est, & qui maxima hodiè famâ clari sunt, ab iis qui harum duarum cognitione instructi non sunt, intelligi nequeunt. Quod Mechanicam attinet, ejus Elementorum, in dissertatione de motu locali, quam meam profiteri non est quod pudeat, jam tradidi partem; atque spero cum eo quod hoc libro de Geometria nunc publici juris facio, duo magna haberi posse adminicula per quæ Physica, prout nunc traditur, intelligatur, recteque de ea judicetur. Fortassis etiam observare licebit eos, quibus honori est Philosophiam suam Geometriæ atque Mechanicæ fundamentis superstruxisse, non semper bene esse fundatos; & illud ipsum quod doctrinæ eorum incrementa dedit, inservire poterit ad errores eorum agnoscendos. Porrò Lectorem moneo, me nullo modo eorum, quæ hoc opusculo traduntur, auctorem haberi velle; undique quæ mihi placuerunt collegi: ac si quis heic quicquam reperiat quod à se inventum putet, aut ab alio quopiam, audacter id arri-

arripiat, Autorive suo attribuat, lubens ego consentio; nec litem ei ullam movebo. Quod si quis forte fortuna quicquam hic offenderit quod alibi non invenit, idque mihi tribuere velit, pro meo tunc id agnoscam, metu ne plane pro deserto habeatur.



MONI-

# MONITA

## ad eos qui Geometriam diſcere cupiunt.

*EOdem tempore quo legitur propoſitio, conſiderentur & appoſita figura. Laboris id principio eſt, ſed duobus tribusve ille diebus ſuperatur.*

*Non deſerendus eſt labor, ſi occurrant res, quæ non initio ſtatim comprehendantur; Geometria non tam facile quam hiſtoria quædam capitur.*

*Si poſtquam propoſitionem aliquam cum attentione legens, eam non intelligas, ulterius progredere; intelliges eam fortaſſe in ſequentibus, aut ad minimum tunc, cum omnibus perlectis de novo planè legere incipies.*

*Numeri qui inter Parentheſes reperiuntur, veluti e.g. (3.24.) notant id quod eo loco dicitur alibi probatum eſſe, nempe libro tertio articulo vigeſimo quarto: ita ut prior numerus librum, reliqui articulum ſignificent; eosque articulos conſulere oportet, ut ſciatur probatio ejus quod legitur.*

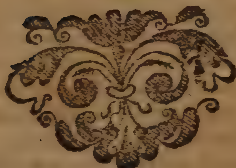
*Si vocabula invenies quæ non intelligas, conſule tabulam quæ in fine ſubjuncta eſt.*

*Maxi-*

*Maxime conducet initio Magistrum, qui has demonstrationes explicet, habere, ea enim ratione multo facilius quam si ipse tantum legeris hæc addisces.*

*Si quis laborem non subterfugerit in Collegium Claremontanum veniendi, Autorem horum Elementorum ea die Lunæ atque Veneris explicantem offendet.*

Sperabam primo quoque tempore reliqua hujus Geometriæ in lucem edere; verùm eorum impressionem aliquandiu differre coactus sum, quo spatium haberem alios Mathematicos tractatus multò magis necessarios publicandi. Quamprimùm Staticam Opticam & Quadrantes, in quibus jamjam distineor, absolvo, continuo statim ordine Algebra, Sectiones Conicæ, & reliqua quæ promisi, ut plena quædam & perfecta Geometria fiat, imprimentur.



Nicolai

# *Nicolai Mercatoris*
in
# GEOMETRIAM
## *Introductio brevis*



*Eometriæ* tradendæ methodus eadem debebat esse, quæ aliarum scientiarum; ubi Nomen exponitur primum, tum definitio, genus, subjectum, objectum, principia, genesis, & affectiones tam primæ, quam secundæ.

*Nomen* Geometriæ dimensionem terræ innuit; quod ea, quæ plerumque metiri solemus, vel terra sint, vel ex terraqueo globo producta.

Convenit igitur hoc nomen apprimè scientiæ vel arti, quæ in dimetiendis objectorum visibilium quantitatibus occupatur: quales sunt itinerum distantiæ; altitudines montium & ædificiorum; agrorum latifundia, vel moles corporum.

Postulabat ab industria mentis ipsa necessitas, ut inquireret in rationem ista definiendi. Voluit igitur sollicitata mens succurrere indigentiæ rei, & intellecto negotio, quæcunque ad institutum facerent, examinare.

Ideoque non dedignatur Geometria or-

tum suum nec invidet nomen arti, quæ suis natalibus præfuerat. Quinimo inventis suis liberè uti jubet; dummodo luminibus suis acceptum feratur, quicquid illa circa materiales extensiones occupata machinatrix usquam pollet.

Dehinc opportunum est quærere, quænam sit illa, quam nos Geometriæ nomine indigitamus. Ne sim longus, accipe *definitionem*.

*Geometria* est scientia circa magnitudinum genesin & affectiones occupata.

*Genus* est *scientia*, cujus finis unicus & solus est scire.

*Subjectum inhæsionis* est *mens*, cujus facultates omnes in eruenda scientia occupantur.

Mentis *facultates* sunt *Voluntas*, *Intellectus*, *Judicium*.

*Objectum* est *magnitudo*, non illa quidem materiæ adhærens sed ab omni materia abstracta Quid sit abstractio Mathematica docent Philosophi. Nobis sufficit, quod possumus concipere lineam, vel extensionem in latum, aut solidum; quamvis illa nulli materiæ adhæreat. Atque in hoc elucet discrimen inter Geometriam puram & Practicam.

*Principia*, quæ magnitudinem constituunt, sunt Infinitum, Punctum, & Motus.

*Infinitum* est, quod omni termino & po

sitio

sitione caret, nec proinde augeri vel minui potest.

Ab Infinito differt *Maximum*, quod augeri quidem nequit, at minui potest omnino.

*Punctum* nec augeri potest, nec minui, neque aliud in se quicquam habet præter positionem

A Puncto differt *Minimum*, quod minui quidem nequit, at augeri potest omnino.

Cæterum Infinitum absolutè consideratum non est principium magnitudinis; sed cùm in Infinito ponitur Punctum, tum demum evadit ipsum Infinitum Campus maximus, qui est veluti matrix vel receptaculum magnitudinum gignendarum.

Sed nec Punctum absolutè consideratum, principium est magnitudinis; sed accedente motu fit terminus lineæ, & quasi semen omnium magnitudinum gignendarum.

Est autem *Terminus* magnitudinis cujusque extremum, nullam utique partem ipsius constituens, sed limites tantùm ponens.

Ita punctum terminat lineam, licet innumera puncta ne minimam quidem constituant lineam. Et linea terminat superficiem, licet innumeræ lineæ ne minimam quidem partem constituant superficiei. Denique superficies terminat corpus, licet innumeræ superficies ne minimam quidem partem constituant corporis.

Sic igitur Punctum terminus est termi-

norum, atque hoc nomine purum putum est principium magnitudinis Reliqui termini, nimirum linea & superficies certo respectu sunt quoque magnitudines, atque tum principii nomine haudquaquam veniunt. Ita linea absolute considerata, magnitudo est, constans partibus suis; at si moveatur linea in transversum, jam consideratur ut terminus & principium superficiei, quam generat. sed cujus tamen partem nullam constituit. Ita superficies absolute considerata, magnitudo est, partibus suis constans; at si moveatur superficies in transversum, jam consideratur ut terminus & principium corporis, quod motu suo generat, cujus tamen partem nullam constituit. Quare principium magnitudinis secundum, proprie loquendo, est *terminus*; quisque scilicet magnitudinis suæ Cum verô à puncto reliqui termini trahant indivisibilitatem illam, cujus ratione vocantur termini, ita ut linea sit indivisibilis in latum, superficies indivisibilis in profundum; ideo puncto, ut termini terminorum, secundi principii locum haud inepte tribui existimamus.

Tertium principium est *Motus*, qui est exspatiatio termini in campo libero.

Motus autem termini cujusque talis sit oportet, ut si quas habet partes, singulæ succedant novis vestigiis, nunquam antea pressis.

Pun-

Punctum quidem, cum nullas habeat partes, quocunque motu cieatur, necessario lineam describit; at linea non quovis motu superficiem: etenim fieri potest ut lineæ rectæ, vel circularis, singulæ partes pristino quidem excedant vestigio, at non ita tamen, ut non aliquæ vel omnes succedant in vestigia jam antea pressa; quo motu nulla producitur superficies, sed tantum linea recta continuatur, vel circularis in seipsum revolvitur. Ideoque dixi, oportere, ut singulæ termini partes novis vestigiis, *nunquam antea pressis*, insistant. Ubi animadvertendum, licet omnes & singulæ partes vestigio suo excedere debeant; non impedire hoc tamen, quò minus lineæ rectæ unus terminus, vel curvæ lineæ ambo termini maneant fixi, ut generetur superficies: nam termini, uti diximus, non sunt partes ejus magnitudinis, cujus sunt termini.

Ut verò mota superficie generetur corpus, omnis quoque superficiei partes nova vestigia occupare debent, nunquam antea pressa; nec tamen impedit hoc, quò minus unicus saltem superficiei terminus, nempe qui sit linea recta, fixus maneat suo loco: quia linea non est pars superficiei.

Corpus autem, licet moveri possit ita, ut singulæ ejus partes novis vestigiis insistant; fieri tamen non potest, quin aliqua vestigia, quæ à succedentibus partibus occupantur,

jam ante pressa fuerint ab aliis partibus, quæ inde excesserunt: ideoque motus corporis non producit novam speciem magnitudinis.

Hinc liquet, non esse plures, quam tres magnitudinis species, nimirum lineam, superficiem, corpus.

Jam vero, *Genesis* magnitudinis est productio extensionis ex termino movente in campo libero.

*Magnitudo* autem est moles determinata & continua.

*Affectiones* magnitudinis *primæ*, quæ illi semper insunt per sua principia, sunt moles, determinatio, & continuitas. Nam ab Infinito habet molem; à termino circumscriptionem vel figuram; & à Motu continuitatem, extensionem, & partium extra partes positionem.

*Affectiones secundæ* oriuntur, cùm vel una aliqua magnitudo comparatur cum suis partibus, respectu molis; etenim tota æqualis est omnibus suis partibus, eademque major qualibet sui parte: vel cùm duæ pluresve magnitudines ejusdem speciei comparantur invicem; nam si termini unius congruant terminis alterius, æquales sunt; sin excurrant termini unius ultra limites alterius, inæquales. Itaque comparatio molis facit *æqualitatem* vel *inæqualitatem*, quæ quidem nihil aliud est, quam ipsa magni-

gnitudinum *ratio*. Et *ratio* quidem *æqualitatis* non nisi unica esse potest: at *inæqualitatis ratio* innumeris modis variat, dum magnitudinum comparandarum altera quidem constantem molis mensuram obtinet, altera vero a minima continuò excrescit in maximam; ubi tot oriuntur rationes diversæ, quot sunt in crescente momenta incrementi, & crescens ad constantem acquirit rationem continuo majorem atque majorem; at constans ad crescentem, rationem continuo minorem atque minorem. Contrarium accidit, cum alterâ quidem magnitudine molem obtinente constantem, altera a maxima continuo decrescit usque ad minimam; ubi decrescens ad constantem acquirit rationem continuo minorem atque minorem; at constans ad decrescentem, rationem continuo majorem atque majorem. Ita magnitudo crescens vel decrescens ad constantem rationes omnes obit, quotcunque sunt a minima usque ad maximam, & constans itidem ad crescentem vel decrescentem.

Sed cum duo vel plures sunt constantes, ad quas totidem crescentes vel decrescentes obeunt rationes continuo majores vel minores; tum oritur *rationum æqualitas* vel *inæqualitas*, quæ quidem melius explicari non potest, quam per ipsam magnitudinum genesin, dum scilicet procreantur motu successivo.

Hic autem *motus* est vel *æquabilis*, cum terminus movens æqualibus temporum momentis æqualia spatia conficit: vel *inæqualis*, cum velocitas intenditur subinde vel remittitur.

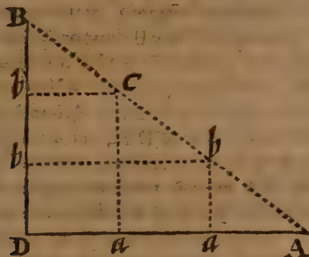
Et cum fieri possit, ut terminus aliquis ad certum tempus incedat quidem motu æquabili; at mox velut ex abrupto mutet tenorem velocitatis in citatiorem vel tardiorem; ubi rursus fieri potest, ut novus ille velocitatis tenor sit quidem in se æquabilis, at respectu prioris omnino citatior vel tardior: ideoque ad explicandam rationum æqualitatem, convenit ubique intelligere motum non modo æquabilem, sed *ejusdem* quoque *tenoris*, hoc est, eadem, quà cœpit, velocitate perpetuo incedentem. Hic ita suppositis,

*Rationes æquales* sunt crescentium ad suam cujusque constantem, cum eodem instanti è carceribus suis erumpunt, atque eodem tempore in suas constantes excrescunt, & præterea quovis instanti simul sistunt. Nam æqualia tempora producunt æquales rationes crescentium ad suam cujusque constantem.

Ubi non est opus, ut crescentes sint ejusdem speciei, neque ut sint æque veloces; sed sufficit crescentem quamlibet ejusdem esse speciei cum sua constante; & motum uniuscujusque crescentis in se esse æquabilem, & ejusdem tenoris.

Hinc

Hinc jam perfacilè est demonstrare sex illos argumentandi modos Geometris usitatos, qui sunt rationis alternæ, inversæ, divisæ, compositæ, conversæ, & ex æquali.




Exponantur enim quæ constantes D A & D B, quas duo puncta à D erumpentia versus A & B producant eodem tempore, ita ut, cum unum pervenerit à D ad *a*, alterum pervenerit à D ad *b*; & cum illud pervenit ad a, hoc pervenerit ad b; denique cum illud ad A, hoc ad B. Dico, per definitionem superiorem; cum crescentes D *a*, D *b* eodem tempore productæ sint & constantes D A, D B itidem eodem tempore; rationem D *a* ad D A æqualem esse rationi D *b* ad D B: Atque ob hoc etiam, *alternando* terminos duos medios, esse rationem D *a* ad D *b* æqualem rationi D A ad D B. Nam

si ab æqualibus temporibus D A & D B, auferantur æqualia D *a* & D *b*; restant æqualia tempora *a* A & *b* B. Maneant jam velocitates ipsarum D A & D B eædem, quæ fuerant; at ipsis D *a* & D *b* gignendis præter ea, quæ habebant tempora, concedantur insuper ipsarum *a* A & *b* B tempora; ita fiet, ut velocitas ipsarum D *a* & D *b* retardetur, & ut producantur nunc quidem eodem tempore, quo D A & D B. Quod si igitur considerentur D *b* & D B, ut constantes; at D *a* & D A, ut crescentes. Jam crescentes D *a* & D A eodem tempore producuntur, & constantes D *b* & D B itidem eodem tempore. Ergo ratio crescentis D *a* ad constantem D *b*, æqualis est rationi crescentis D A ad constantem D B. q. e. d.

Rursus, supponendo ut prius, rationem D *a* ad D A æqualem esse rationi D *b* ad D B: dico, *invertendo* terminos, esse quoque rationem D A ad D *a* æqualem rationi D B ad D *b*. Sint enim D *a* & D *b* constantes, & D A & D B crescentes. Cum D *a* & D *b* gignantur eodem tempore; & D A, D B itidem eodem tempore: erit per definitionem, ratio D A ad D *a* æqualis rationi D B ad D *b*.

*Tertio*, si sit ratio D *a* ad D A æqualis rationi D *b* ad D B; erit etiam *dividendo* terminos ratio D *a* ad *a* A æqualis rationi D *b* ad *b* B. Sint enim constantes *a* A & *b* B; harum tempora sunt æqualia, quippe quæ

restant,

restant, cum ab æqualibus ipsarum D A & D B temporibus auferuntur æqualia tempora ipsarum D *a* & D *b*: sed & crescentium D A & D B tempora sunt æqualia: Ergo sequitur per definitionem, quod ratio crescentis D *a* ad constantem *a* A æqualis sit rationi crescentis D *b* ad constantem *b* B.

*Quarto*; si sit ratio D *a* ad *a* A æqualis rationi D *b* ad *b* B; erit etiam *componendo* terminos, ratio D A ad *a* A æqualis rationi D B ad *b* B; item ratio D A ad D *a* æqualis rationi D B ad D *b*.

*Quinto*; si sit ratio D A ad D *a* æqualis rationi D B ad D *b*; erit etiam *convertendo* ratio *a* A ad D *a* æqualis rationi *b* B ~~ad B *b*~~.

*Sexto*; si sit ratio D *a* ad *a* α æqualis rationi D *b* ad *b* 𝔟; & porrò ratio *a* α ad α A æqualis rationi *b* 𝔟 ad 𝔟 B: erit etiam *ex æquali* ratio D *a* ad α A æqualis rationi D *b* ad 𝔟 B

Quæ quidem omnia demonstrantur ex ipsa temporum æqualitate, nec ulteriorem explicationem postulant.

Dicitur autem ista, de qua hactenus egimus, rationum æqualitas *proportio*; & magnitudines ipsæ rationum æqualitate affectæ, vocantur *proportionales*. Verum ad intelligendam *rationem duplicatam*, vel *triplicatam*, quæque hanc sequitur, figurarum *similitudinem*; descendendum nunc est ad singularum magnitudinum genesin,

quo pacto nimirum *linea recta* procreetur, & *angulus rectilineus*, nec non *superficies plana*, atque in hac *circulus*, & *linea perpendicularis*, item *figuræ trilateræ* & *quadrilateræ*, tandemque *lineæ parallelæ*, & *figuræ similes* tam *planæ*, quam *solidæ*. Itaque jam.

*Linea recta* generatur, cum punctum movetur ita, ut singulorum vestigiorum à singulis elongationes cum ipsis lineæ incrementis paria faciant.

Cùm verò magnitudines ex iisdem principiis, atque eodem modo genitæ, congruant inter se; rectæ autem omnes generentur ex puncto, eodem illo, quo diximus, modo: ideoque omnes rectæ sibi mutuò congruunt.

*Congruere* autem dicuntur magnitudines, cum, applicatione facta, singula puncta unius incidunt in totidem puncta alterius. *Congruentia* autem *cum æqualitate* conjungitur, cum singula puncta unius incidunt in singula puncta alterius.

Præterea, cum quævis pars rectæ eodem generetur modo, quo & tota: ideoque, si quævis duo puncta partis incidant in duo puncta totius; congruent & singula reliqua puncta partis totidem punctis totius, nec ullum partis punctum existet extra totam. Quia, dum generatur recta, non nisi uno modo proceditur à puncto ad punctum.

Unde

Unde patet; si duæ rectæ diversæ sibi mutuò occurrant, eas non posse nisi in unico puncto convenire. Quæ enim rectæ in pluribus, quàm uno, punctis conveniunt, non sunt diversæ, sed eadem recta

Patet item; si pars rectæ moveatur per vestigia totius, vel si recta aliqua sua ipsius vestigia legat; non nisi eandem rectam continuari.

Et si recta convertatur, itidem ut axis sphæræ, atque inter convertendum duo quævis illius puncta hæreant suo vestigio: nullum omninò relinquorum punctorum vestigio suo excedet. Quia, ut diximus, per duo puncta non nisi unica recta continuari potest.

Et vicissim; si alicujus lineæ, dum circa duo puncta fixa convertitur singula puncta hæreant suo vestigio; illa linea erit recta. Nam si aliquod ejus punctum distaret â recta circa eadem puncta conversa; fieret, ut conversis ambabus, revolutionibus æquabilibus & synchronis ipsum punctum distans eandem semper servaret distantiam, cum ambæ lineæ situm inter se eundem servent: ideoque punctum distans, quod initio revolutionis erat infra rectam, post dimidiam revolutionem foret supra. Et cum recta locum non mutet; oporteret, ut punctum distans locum mutasset, quod tamen suo vestigio hærere supposueramus.

 Dein-

Deinde, si in linea recta sumatur punctum aliquod, quod ab ipsa digrediendo describat aliam rectam a priori diversam; tum generatur *angulus rectilineus*, qui nihil est aliud, quàm duarum rectarum diversarum ad se invicem inclinatio.

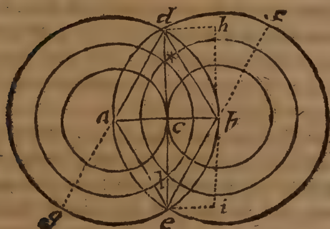
Facto autem angulo rectilineo, si tertia quædam recta moveatur super ambabus angulum intercipientibus, ita ut tertia illa nunquam non stringat ambas; tum generatur *superficies plana*, & ubicunque tandem sistat tertia illa linea, ibi triangulum terminat rectilineum, quæ est figura plana tribus istis rectis inclusa.

Quòd si porrò in superficie plana ponatur recta linea, quæ altero suo extremo figatur, dum ipsa, circumgyrando in orbem, redeat ad situm pristinum; figura sic generata in plano vocatur *circulus*; & linea, quam extremum mobile describit, est *peripheria*; & punctum fixum est *centrum*. Cæterum ex ipsa genesi innotescit differentia circuli specifica, quæ consistit in æqualitate omnium rectarum a centro ad peripheriam eductarum.

Est verò & alia circuli genesis, quam concipies, si lapidem fingas naturali descensu incidere in stagnum quietum. Etenim à puncto, ubi incidit lapis, tanquam centro, emicabit in superficie stagni circulus quidam initiò minimus; qui paulatim excur-

renti-

rentibus undique radiis excrescet in maximum. Ubi memineris, me in hac delineatione uti lapide pro puncto, & superficie stagni pro plana ( licet reverà sit sphærica) & motu radiorum, quasi esset æquabilis, licet fortasse incitatior sit initio, & tardior in fine. Neque aliter faciunt Geometræ, cùm per figuras in charta vel pulvere exaratas subjiciunt oculis, quæ mente concipi volunt.




Quòd si verò duo lapides eodem instanti & impetu incidant in duo diversa stagni puncta; generabuntur duo circuli, quos æqualiter crescere putemus Hi sibi mutuò occurrerent primùm in puncto *c*, quod ab utriusque centro *a* & *b* æqualiter distat; cùm radios æqualiter crescere statuamus. Post-

quam

quam verò se mutuo attigerint isti duo circuli, jam quoque incipient se invicem secare in aliis subinde atque aliis punctis; quæ sectiones tam supra quam infra primum contactum excurrent in lineam, cujus singula puncta à centris circulorum æqualiter absunt. Et dum pergunt crescere circuli, tandem illorum peripheriæ simul appellunt utraque ad alterius centrum; atque tum radii, continuati à centris ad utramque sectionem, faciunt cum ea, quæ centra connectit, duo triangula æquilatera *a b d* & *a b e*, quorum basis communis est *a b*: lineæ verò *c d* & *c e* à primo contactu *c* ad utriusque trianguli apices *d* & *e* extensæ, sunt inter se æquales; quippe æqualibus motibus atque eodem tempore genitæ.

Sed & anguli quatuor circa *c* eodem modo geniti, nimirum *a c d*, *b c d*, *a c e*, *b c e*, sunt inter se æquales. Ergo inclinatio lineæ *a c* ad lineam *c d* æqualis est inclinationi ipsius *b c*, ad *c e*; & porro lineæ *c d* ad lineam *c b* inclinatio æqualis est inclinationi ipsius *c e* ad *c a*. Quæ igitur ex æqualibus inclinationibus componuntur *Sergentia*, nimirum lineæ *a c* ad *c b* per inclinationes *a c d* & *d c b*, & lineæ *b c* ad *c a* per inclinationes *b c e* & *e c a* sunt æquales. Ergo radii contingentium *a c* & *b c* sunt *in directum* siti; & recta *contra connectens a b* transit per contactum *c*.

Sunt

Sunt verò & *c d* & *c e* lineæ propter eandem rationem *in directum* sitæ; eædemque deprehendentur quoque esse *rectæ*, si triangula *b c d*, *b c e*, fixis punctis *c* & *d*, item *c* & *e*, convertantur, donec incidant in plana triangulorum *a c d*, *a c e*. Nam angulus *b c d* congruet angulo *a c d*, item angulus *b c e* angulo *a c e*, & recta *c b* rectæ *c a*. Ubi non solùm puncta *d* & *e* manent suo loco, ut erat suppositum, sed & quæcunque alia in linea *d e* puncta à circulorum sectionibus genita fuerant, veluti K & *l*, singula suis vestigiis hærent, dum triangula *b c K*, *b c l*, & reliqua simul genita convertuntur. Ergo, inquam, *d c e* est linea recta, quæ cum ad rectam *a c b* æquales habeat inclinationes s. angulos *d c a* & *d c b*, dicitur ob hoc *perpendicularis*, & anguli ipsi æquales *d c a*, *d c b* vocantur *recti*.

Cæterùm recta *d e* non tangit peripherias contingentium circulorum nisi in unico puncto *c*. Nam quæcunque magnitudines non possunt ex iisdem principiis eodem modo produci, eæ nec possunt sibi mutuò congruere. Non possunt autem circuli occurrentes in *c*, & recta *d e* eodem modo produci: quia recta cum æqualibus incrementis pares facit elongationes â puncto *c*; circuli verò contingentes in se redeunt. Ergo recta *d e*, & circuli contingentes non possunt sibi mutuo congruere. Enimverò, si vel in duobus punctis congruerent, etiam tota longitudine congruerent.

Ex

Ex eadem porrò scaturigine manat omnium omnino *triangulorum isoscelium* pariter ac *rectangulorum* genesis, omnium item *rhomborum* & *parallelogrammorum rectangulorum*, nec non singulorum *affectiones inseparabiles.*

Nam in isoscelibus quidem una cum æqualibus lateribus generantur æquales anguli. In rhombis verò opposita latera & anguli fiunt æquales. In rectangulis autem triangulis, quale est *b c d*, duo anguli acuti *c b d* & *c d b* semper æquipollent uni recto. Applicetur enim trianguli *a c e* hypotenusa *a e* hypotenusæ *d b* trianguli *d c b*; componetur ex ambobus triangulis figura rectilinea *b c d h*. Et eodem modo ex triangulis *a c d* & *b c e* componetur figura *b c e i*. Cùm verò *d c*, *c e*, *h b*, *b i* sint æquales; item *d h*, *c b*, *e i* æquales; & rectæ *d c*, *c e* in directum sitæ: poterunt *d* & *h* puncta æquali motu descendere, & simul appellere, *d* quidem ad *c*, *h* verò ad *b*; & tum linea *d c* congruet lineæ *c e*, & *h b* ipsi *b i*, & figura *b c d h* figuræ *b c e i*, & angulus *h d c* angulo *b c e*: & cùm *b c e* sit rectus; erit & *h d c* rectus. Sed *h d b* æqualis est ipsi *c b d*. Ergo *c b d* cum *c d b* æquipollet uni recto. q. e. d. Sunt ergo etiam figurarum rectangularum, qualis est *b c d h*, & latera & anguli opositi æquales; & diameter *d b* illas dividit in duas partes æquales.

Jam

Jam verò, cum *i c* faciat cum *d e* duos angulos *i c e*, *i c d* duobus rectis æquales; idem valebit in triangulis *a c l* & *b c* K eodem modo compositis, & per descensum aptatis; item queq; in omnibus aliis triangulis à circulorum crescentium sectionibus simul productis. Quapropter recta rectæ insistens semper facit duos angulos duobus rectis æquales.

Rursus, cùm *alterni d a b* & *a b e* sint æquales, & eorum *complementa a b f* & *b a g* itidem æqualia; sequitur, quòd inclinatio lineæ *d a* & *a b*; & hujus *a b* porro ad *b f*, æquales sint inclinationibus ipsius *e b* ad *b a*, & hujus *b a* porrò ad *a g*: quare *a d* non magis annuit ad *b f*, quàm *b e* ad *a g*, nec *a d* producta citius occurret *b f* productæ, quam *b e* occurrat ipsi *a g*. Cum verò *e b f* & *d a g* sint rectæ, non possunt sibi mutuò bis occurrere: ergo *e b f* & *d a g* nunquam concurrent, ideoque vocantur *Parallelæ*, quarum affectio inseparabilis est, quòd habeant angulos alternos *d a b* & *a b e* æquales.

Figuræ autem *a d b e*, & *h c d b*, parallelis lineis contentæ vocantur *parallelogramma*.

Possunt verò ex jam dictis perfacilè derivari reliquæ triangulorum quorumcunque affectiones. Et primò quidem, quòd cujusque trianguli tres anguli æquales sint duobus rectis. Cùm enim trianguli rectanguli tres anguli æquipolleant duobus rectis, & nul-

nullum non triangulum dividi poſſit in duo rectangula; æquipollebunt utriusque trianguli rectanguli duo acuti uni recto, & cum trianguli obliquanguli omnes anguli æquipolleant duorum rectangulorum acutis; patet cujusque trianguli tres angulos æquales eſſe duobus rectis

Patet quoque; ſi trianguli alicujus ſingula latera æqualia ſint ſingulis alterius trianguli lateribus; etiam angulos congruere, & eſſe æquales. Nam ſi baſis unius applicetur baſi alterius, & intervallo unius lateris trianguli, ad quod fit applicatio; deſcribatur unus circulus, & intervallo alterius lateris alter circulus: oportet, ut applicati trianguli latera ſibi mutuo occurrant in communi circulorum ſectione. Quoniam omnes rectæ, quæ æquales ſunt trianguli applicati lateribus terminantur in peripheria ſui quæque circuli; quare non poſſunt ſibi mutuo occurrere, niſi in communi circulorum ſectione. Congruentibus autem lateribus, non poſſunt non congruere anguli.

Patet denique, cujusque trianguli duo latera majora eſſe tertio. Nam ſi recta connectens centra circulorum contingentium ſumatur pro baſi; liquet, quod ſuper iſta baſi conſtitui poſſit triangulum cujuscunque figuræ. Atqui illa latera nunquam concurrere poſſunt in ullo puncto, quod ſit utrique peripheriæ commune, cum non tan-

tangant se in pluribus punctis, quàm uno. Ergo vel in unius tantùm circuli peripheria concurrent, vel in neutrius. Si in unius tantùm; jam unum quidem latus æquale, est dimidiæ basi, at alterum majus; ergo ambo simul majora totâ basi. Sin in neutrius peripheria concurrant; vel erit punctum concursus extra utrumque circulum, & jam utrumque latus majus dimidia basi; vel fiet occursus intra alterutrum æqualium circulorum, & tum poterunt describi alii duo circuli, ita ut unus transeat per punctum concursus, alter verò eum tangat in aliquo puncto baseos; atque sic erit illud punctum rursus extra hunc alterum circulum, cum non tangant se nisi uno puncto.

Quod si Problemata sectari lubeat, habemus hic lineæ & anguli bisectionem, erectionem & demissionem perpendicularis, angulorum æqualium & linearum parallelarum descriptionem, quæ in Geometria utramque paginam faciunt. Sed properandum est nobis ad finem.

Interim tacendum non est, posse & parallelogramma & triangula cujuscunque generis etiam alio modo produci. Nam si recta insistat rectæ perpendiculariter, incipiatque moveri in transversum, ita ut singula ejus puncta æqualiter recedant à pristinis vestigiis; describetur isto motu parallelogrammum rectangulum. Nam apex lineæ insi-

ſtentis, à linea ſubjecta ſemper æqualiter diſtat, ideoque motu ſuo lineam deſcribit parallelam. Et ad quemcunque ſitum pervenerit linea mota, ſemper tota æqualiter abeſt à quovis relictorum veſtigiorum, hoc eſt, ſemper parallela manet primo termino, unde exceſſerat. Quòd ſi jam tantundem promoveat in transverſum, quantum ipſa longitudine pollet; fit *quadratum*: ſin plus, vel minus; fit *rectangulum alterâ parte longius*.

Sin recta rectæ inſiſtens non faciat quidem angulum rectum, attamen motu ſuo ſingula puncta æqualiter provehat, & tantundem excurrat in latum, quantum ipſa longitudine pollet; fit *Rhombus*: ſin plus, vel minus; *Rhomboides*.

Eodem modo, ſi plana ſuperficies, inſiſtens planæ, moveatur ita, ut ſingula ejus puncta æqualiter procedant; fit *priſma*. Et ſi figura inſiſtens ſit parallelogrammum; corpus, quod generatur, eſt *parallelepipedon*, hoc eſt, parallelis ſuperficiebus incluſum.

*Coni* & *Cylindri* geneſin habetis apud Euclidem, ubi motu trianguli vel parallelogrammi, gyrante circa latus perpendiculare, producuntur: ne fortè ſoli videamur motum ad generandas magnitudines accerſere.

Poſſunt verò & Conus & Cylinder aliter quoque produci; hic quidem, ſi circulus mergatur in profundum; ille vero, ſi inter mergendum a minimo continuò augeatur in maximum.

De

De parallelogrammis, prismatibus, parallelopipedis, Cylindris unum idemque est Theorema, quòd sint in eadem ratione cum lineis, quas singula puncta, dum generantur ipsæ magnitudines, motu suo describunt. Id quod ex definitione æqualium rationum manifestum est.

Redeundo verò ad Figuram Primam, si punctum quoddam incipiat moveri ab A versus D, & simul ex movente excrescat linea sursum, quæ semper ad A D obtineat eundem angulum, atque interea dum pervenit ad D, ipsa crescat ad altitudinem D B; jam describetur duplici illo motu superficies A D B, quæ vocetur constans, & crescentes sint A a b, A a c; Dico, crescentem A a b ad constantem A D B habere *duplicatam rationem* ejus, quam habet crescens A a ad constantem A D; ideò, quia eodem tempore bis crescit in ratione A a ad A D; etenim dum crescit in longum in ratione A a ad A D, simul etiam crescit in latum in ratione a b ad D B (quæ eadem est cum ratione A a ad A D.) Eodem modo ratio A *a c* ad A D B duplicata est rationis A *a* ad A D.

Quòd si verò à singulis lineæ crescentis in altitudinem D B vestigiis descendant inter movendum totidem parallelogramma, crescentia simul in latum & profundum; jam describetur motu transverso istorum parallelogrammorum corpus solidum, quod

voca-

vocatur *pyramis* Oportet autem non modò lineam, quæ crescit in altitudinem D B, interea dum movetur, eundem semper ad A D angulum obtinere; sed & parallelogramma crescentia eodem semper modo inclinari ad superficiem A D B. Et quocunque articulo sistatur motus pyramidis crescentis, semper habebit pyramis sistens ad constantem *triplicatam rationem* ejus, quam habet latus sistentis ad latus constantis. Dico; pyramidem, cujus summitas est A a b, ad eam, cujus summitas est A D B esse in ratione lineæ A a ad A D ter repetitâ. Dum enim latus, movente puncto, crescit in ratione A a ad A D; ipsa pyramis A a b crescit ter in eadem ratione, nimirum in longum, in ratione A a ad A D, in latum in ratione a b ad D B, denique in profundum in ratione qua demerguntur parallelogramma.

Figuræ autem, quæ sic crescunt in ratione duplicata, vel triplicata, vocantur *similes*.

Hactenus igitur derivavimus ortum magnitudinum ex genuinis principiis, & ortarum affectiones ex ipsa genesi demonstravimus. Quam methodum, si, quibus vacat, persequi libuerit; habebimus aliquando Geometriam scientiam suo nomine dignam.

(o)

J. J. ELE-



J. J.

# ELEMENTA GEOMETRIAE.

## LIBER PRIMUS
### *De lineis & angulis.*

I.



Er nomen *quantitatis* intelligimus rem, quæ comparata ad aliam ejusdem naturæ, major vel minor, æqualis vel inæqualis appellari poteſt: ut ſunt extenſio, numerus, pondus, tempus, motus; hæc omnia, in quantum ita comparari poſſunt ſecundum plus vel minus, ſunt objectum Geometriæ.

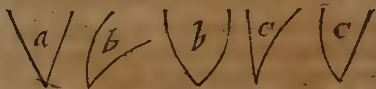
2 Nihilominus ſubſiſtimus tantum in conſideratione extenſionis, utpote quæ exemplum & menſura omnium aliarum quantitatum eſſe poteſt.

3. Quantitas, quæ extensionem tantùm, habet in longitudinem sine ulla profunditate, appellatur linea; illa quæ extensa est in longitudinem & latitudinem dicitur *superficies*: & illa quæ longitudinem, & latitudinem & profunditatem habet, appellatur *corpus* sive *solidum*.

4. *Punctum* est initium quantitatis, quod concipitur ac si nullam haberet extensionem, & undiquaque indivisibile esset: sic extrema vel medium lineæ, sunt puncta.

5. Lineæ sunt vel *rectæ* vel *curvæ*: similiter superficies sunt vel *planæ*, quæ *plana* dicuntur simpliciter: vel *curvæ*, quæ sunt vel *convexæ*, ut exterior superficies globi, vel *concavæ*, ut interior alicujus fornicis.

6 Quando duæ lineæ se mutuo tangunt in uno puncto, & postea altera ab altera recedit oritur inter illas *angulus*, qui *Rectilineus* dicitur, si duæ lineæ sunt rectæ, *a* *Curvilineus*, si sunt curvæ, *b*; *Mixtus*, si una est curva, altera recta, *c*.




7. Angulus tanto minor esse dicitur, quanto magis lineæ quæ illum constituunt, ad se invicem inclinatæ sunt. Sumantur duæ

duæ lineæ *a b* & *a c*, quæ ſe mutuo tangant in *a*; ſi concipias, duas illas lineas moveri inſtar compaſſi, ita ut in *a*, tanquam clavo compaſſi, ſemper conjunctæ maneant, licet extremitas *c* recedat ab

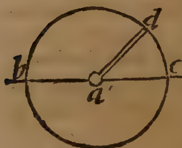



extremitate *b*; tunc obſervabis, quo magis extremitates à ſe mutuo recedent, eo majorem quoque evadere angulum inter illas conſtitutum: & contra, quo magis extrema ad ſe mutuo accedunt, eo magis lineæ ad ſe invicem inclinatæ erunt, & hinc angulus minor erit.

8. Hinc bene notandum, magnitudinem angulorum non æſtumari longitudine linearum, illos conſtituentium, ſed linearum inclinatione Ex. gr. angulus *b* eſt major angulo *a*, licet lineæ ang. *b* ſint breviores: quoniam non ſunt ita inclinatæ ad ſe invicem, ut lineæ ang. *a*: clarius, imaginare ang. *b* eſſe impoſitum ang. *a*, ceu monſtrant lineæ punctatæ, ang. *b* repræſentantes. Tunc videbis angulum *b* commode intra ſe continere ang. *a*, lineasque ang. *a* magis ad ſe invicem inclinatas eſſe, quam lineas ang. *b*, & ſic tandem ang. *a* multo minorem eſſe.

9. Angulus communiter tribus literis designatur, quarum media notat punctum contactus linearum. ut in fig. seq. *d a c* notat angulum per duas lineas *d a* & *c a* constitutum, ita ut *a* sit punctum commune, quo se lineæ mutuo tangunt.

10. Si concipimus lineam *a d* in extremo *a* affixam medio lineæ *b c*, eamque præterea sinamus moveri circa punctum *a*; tunc quando illa redierit ad eundem locum, ex quo moveri cœperat, describit lineam curvam, quæ appellatur *circulus*, vel potius *circumferentia* circuli, nam proprie loquendo, *circulus* est omne illud spatium, quod circumferentiæ includitur.




11. Pars circumferentiæ appellatur *Arcus*, ut *c d*.

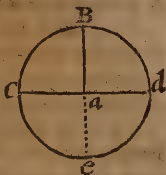
12. Linea *b c* per circumferentiam terminata, appellatur *Diameter*, quæ dividit circulum in duas partes æquales, quod probare opus non est. Imo omnis linea recta ducta per *centrum* id est, punctum *a*, dividet circulum in duas partes æquales, & ipsa etiam erit diameter.

13. Linea *a d* vel *a c* quævis alia ducta è centro ad circumferentiam, appellatur *radius*, vel *semidiameter*.

14. Omnes

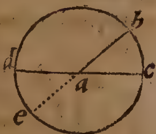
14. Omnes radii sive semidiametri unius circuli sunt æquales.

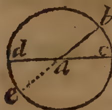
15. Quando extremitas *B* æqualiter distat à duobus extremis diametri *c* & *d*, id est, quando *B* est in medio semicircumferentiæ; tunc linea *B a* facit duos angulos *B a c* & *B a d*, qui *recti* vocantur, & utrinque sibi æquales sunt. Et si linea *B a* producta fuerit versus *e* faciet quatuor angulos rectos, & novam constituet diametrum, quæ cum priori circulum dividet in quatuor partes æquales.




16. Tunc etiam lineæ dicuntur perpendiculares una ad aliam, *B a* ad *d c*, & *d a* ad *B e*.

17. Verum si *b* proximior est uni extremo diametri, quam alteri; tunc hæc linea dicitur *obliqua* & facit utrinque duos angulos inæquales, quorum minor appellatur *acutus*, *b a c*; major vero *obtusus*, *b a d*. Et si linea *b a* fuerit producta usque ad *e*, erit illa nova diameter & infra duos novos angulos constituet: ita ut in universum adsint quatuor anguli, quorum duo,



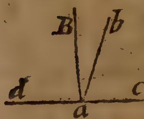



qui se tantum in puncto tangunt ut *b a c* & *e a d*, vel *b a d* & *c d e* appellantur *oppositi ad verticem*: illi vero, qui habent latus commune dicuntur *anguli deinceps*, ut *d a b* & *b a c*, vel *b ac* & *c a e* &c.

18. Anguli qui arcus æquales habent, etiam sunt æquales. Vt si probetur arcum *c b* esse æqualem arcui *e d*, etiam probatum erit angulum *c a b* esse æqualem *e a d*.

19. Duo anguli deinceps, simul sumti, semper æquales sunt duobus rectis. Nam linea *d c* est diameter, & cum illa circulum in duas partes æquales secet, erunt duo arcus *c b* & *b d*, simul sumti, æquales semicircumferentiæ. Sic etiam duo anguli *c a b* & *b a d* simul sumti, æquales erunt duobus rectis, quoniam semicirculum adimplent, æque ac duo recti.

20. Hac ratione hæc propositio est generalis; cum linea recta super aliam lineam rectam consistit, duos angulos deinceps vel rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Nam si lineæ sunt perpendiculares,

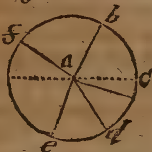



ut *B a* super *d a c*, anguli utrinque sunt recti. (15) Si vero linea est obliqua, ut *b a* super eadem *d a c*, tunc anguli quidem sunt inæquales; sed quantum obtusus *b a d* superat rectum *B a d*, tantum etiam acutus *b a c* superatur ab alio recto *B a c*. Et sic par-

parvitas unius compensatur magnitudine alterius.

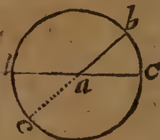
21. Si duo anguli, latus commune habentes, æquales sunt duobus rectis, reliqua latera efficient lineam rectam. Sint anguli *d a b* & *b a c*, latus commune *b a* habentes, æquales duobus rectis, dico lineam *a d* cum linea *a c* constituere rectam lineam; (fig. art. 17.) quod manifestum est per jam dicta. Nam si è centro *a* ducatur circulus *d b c*, duo arcus *d b*, *b c* erunt æquales semicircumferentiæ, quoniam supponitur hos duos angulos æquales esse duobus rectis. Et sic lineæ *d a*, *a c* constituent diametrum & per consequens erunt *posita in directum*.

22. Si ex dato puncto *a* erigantur diversæ lineæ *a b*, *a c*, *a f*, *a d*, &c. illæ efficient diversos angulos; & omnes hi anguli simul sumti, vel si qui alii circa idem punctum constituerentur, erunt æquales quator rectis: Nam




perspicuum est, omnes hos angulos complere circulum, cujus circumferentiam quoque dividunt in totidem arcus *b f*, *f e*, *e d*, *d c*, *c b*. Et sic omnes hi arcus simul sumti sunt æquales quatuor quadrantibus circuli, id est, omnes hi anguli sunt æquales quatuor rectis; nam etiam quatuor anguli recti adimplent circulum.

23. Anguli *oppositi ad verticem* sunt inter se æquales. Sint duæ lineæ rectæ *d a c* & *b a e* dico angulum *b a c* esse æqualem angulo *e a d*: nam arcus *c b*, cum arcu *b d* constituit semicircumferentiam (12) & eadem ratione arcus *b d* cum arcu *d e* etiam facit semicircumferentiam. Hinc arcus *b c* est æqualis arcui *d e*, quia arcus *b d* semper facit eandem quantitatem, sive conjungatur cum arcu *b c*, sive cum arcu *d e*. Ob eandem rationem angulus *d a b* est æqualis angulo *c d e*.



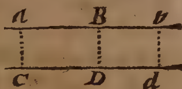

24. Tota circumferentia circuli dividitur in 360 partes æquales, quæ *gradus* appellantur, & quilibet gradus in 60. partes æquales, quæ sunt *minuta*, & quodlibet minutum in 60. *secunda* & sic in infinitum. Et quando magnitudo angulorum determinanda est, numerantur gradus, quos illi comprehendunt. Ex. gr. quando nominamus angulum 90. grad. tunc intelligimus angulum rectum, quia angulus rectus comprehendit quartam partem circumferentiæ, quæ continet 90 gradus, quia tota circumferentia continet 360, quorum quarta pars est 90. Similiter angulus 60. grad. est angulus qui facit duas tertias recti.

25. Gradus in scribendo notantur cifra, quæ numeris vel imponitur vel à latere adjun-

jungitur. Minuta notantur virgula una I. Secunda per duas virgulas II: Tertia per tres III: Quarta per quatuor IV: &c. ut O I II.

25. 32. 43. id eſt, 25. gradus, 32. minuta, 43. ſecunda.

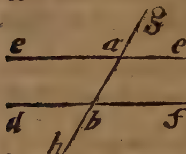
26. Duæ lineæ dicuntur *Parallelæ*, quando illæ undique æqualiter à ſe invicem diſtant. Duæ lineæ *a b* & *e d* ſunt parallelæ, ſi æqualiter diſtant in *a e* & in *b d* vel in *B D* & in quovis alio loco.




27. Hæc diſtantia menſuratur per perpendicula. Vt ſi quis concipiat ex puncto *a* lineam *a e* perpendiculariter cadere ſuper *e d*: & eodem modo *b d* cadere perpendiculariter ſuper *d e*; ſtatim cognoſcet, quod poſitis illis duobus perpendiculis *a e*, *b d* æqualibus, etiam duæ lineæ *a b* & *e d* æqualiter ab invicem diſtent in his locis; quod natura notum eſt ſine ulteriori probatione.

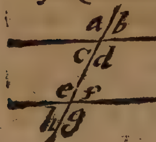
28. Duæ lineæ parallelæ in infinitum productæ, nunquam concurrunt; nam cum ſemper æqualiter diſtent, ubivis licebit perpendiculares ducere æquales *a e* aut *b d*: & per conſequens nunquam ſe contingunt.

29. Si linea secat duas alias lineas parallelas, erit æqualiter inclinata ad utramque: & si linea secans duas alias, æqualiter ad




utramque inclinata est, hæ duæ erunt parallelæ. Sint duæ lineæ parallelæ *c a e*, *d b f* secatæ per lineam *g a b h*; dico hanc lineam *g a b h* esse inclinatam ad *c a e*, eadem ratione ac ad *d b f*: id est, angulum *g a e* esse æqualem angulo *g b f* Hoc natura notum esse videtur, si modo exigua attentione perpendatur. Nam si angulus *g a e*, ex. gr major esset, & linea *a e* magis remota ab *a g*, tunc punctum *e* lineæ *a e* inclinaret versus *f*, quia *b f* tantum non recederet, quantum *a e*: & sic duæ lineæ *a e* & *b f* non essent parallelæ. Vlterius, si concipimus has duas lineas tanquam latera regulæ, poterimus totam regulam considerare tanquam lineam indivisibem. Sic anguli *h b d* & *c a g* erunt ut *anguli deinceps* æquales duobus rectis (20.) & ang. *h b d* & *g a e* erunt ut duo anguli *oppositi ad verticem* inter se æquales. (23.)

30. Quando linea secat duas parellelas, efficit octo angulos, quorum quatuor *a*, *b* : *h*. *g*, sunt *externi*, reliqui sunt *interni*. Anguli *c* & *f* vel *d* & *e* appellantur *alterni*; ang. *b*




& *f*

& *f* vel *a* & *e* sunt *alternatiбe oppoſit*: anguli *d* & *f*, vel *c* & *e* ſunt *interni ad eaſdem partes* lateris.

31. Anguli alterni & alternative oppoſiti ſunt inter ſe æquales *b*, *f*, *c*, *h*, & *a*, *e*, *d*, *g*. (29.)

32. Quando linea hac ratione incidit in duas paralleias, efficit angulos internos ad eaſdem partes æquales duobus rectis. Angulus *d* cum ang. *f* eſt æqualis duobus rectis, quia *f* eſt æqualis ang. *c* (31.) Sed *c* cum *d* facit duos angulos rectos: (20.) E m. *f* cum *d* faciet duos angulos rectos, Q.E D.

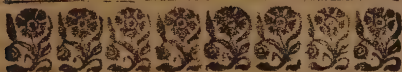
33. Propoſitio quædam appellatur *converſa* alterius, quando facta concluſione ex aliquo quod ſuppoſitum erat, poſtea in propoſitione altera converſa id ſupponitur quod concluſum erat, ut exinde colligamus quod ab initio ſupponebatur. Ex gr hic dicimus, ſi lineæ ſunt parellelæ, anguli *d* & *f* ſimul ſumti æquales erunt duobus rectis, ubi ſupponimus lineas eſſe parallelas & exinde concludimus: E, anguli &c. Converſa ſic fieret. Si anguli *interni ad eaſdem partes* lateris ſunt æquales duobus rectis, lineæ erunt parallelæ: ubi ex ſuppoſito, hos angulos eſſe æquales duobus rectis, concludimus lineas eſſe parallelas.

34 Converſæ h.l. ſunt veræ, nim. ſi linea duas alias lineas ſecās angulos alternos &c. æquales facit, hæ duæ lineæ ſunt parallelæ.

3. Si duæ lineæ ſunt parallelæ uni tertiæ, inter ſe erunt parallelæ. Sit linea *a b* parallela lineæ *c d* & *e f* ſit etiam parallela *c d*, dico *a b* eſſe parallelam *e f*: nam ſi ducatur linea *b d f* omnes tres ſecans, angulus *b* erit æqualis ang. *d* (31.) & eodem modo angulus *f* erit æqualis angulo *d*: 31 E angulus *b* eſt æqualis ang. *f*; quia axioma eſt, ſi duo ſunt æqualia eidem tertio, inter ſe ſunt æqualia. Quoniam igitur angulus *b* eſt æqualis ang. *f*, ſequitur lineam *a b* eſſe parallelam lineæ *e f*. (34)



LIBER



# LIBER SECUNDUS

## *De Triangulis.*

I.

F*Igura* eſt ſpatium undique circumſcriptum. Si lineæ illam terminantes ſunt rectæ, appellatur figura *rectilinea*: ſi curvæ ſunt, appellatur *curvilinea*; & ſi partim rectæ partim curvæ, vocatur *mixta*.

2. Figuræ ſunt vel *planæ*, quæ ſunt in ſuperficie plana, vel *ſolidæ*, quæ ſunt corpus cum tribus dimenſionibus. Hic agimus tantum de figuris planis.

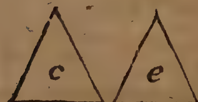
3. Omnes lineæ, quæ figuram circumſcribunt, ſimul ſumtæ, conſtituunt *circumferentiam*, vel *Perimetrum*, vel *circuitum* figuræ.

4. Ex omnibus figuris planis curvilineis vel mixtis, circulus tantum conſideratur, vel pars circuli, terminata arcu & una vel pluribus lineis rectis.

5. Inter figuras rectilineas ſimpliciſſima eſt *Triangulum*, quod terminatur tribus lineis, tres angulos conſtituentibus

6. Triangulum, habens angulum rectum, appellatur *Triangulum rectangulum*, *a*: habens angulum obtusum, appellatur *obtusangulum* vel *Amblygonium*; habens tres angulos acutos, dicitur *acutangulum* vel *Oxygonium* *c*, *e*.

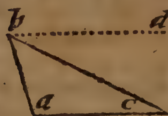


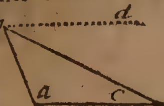

7. Quando triangulum omnia latera habet inæqualia, appellatur *Scalenum*, *a*, *b*: Si duo latera sunt æqualia, est *isosceles*, *e*: si omnia latera sunt æqualia, est *æquilaterum*, *e*.

8. Si duo saltim latera trianguli sumuntur, appellari possunt *crura*, & tertium tunc appellabitur *basis*. Omnes latus potest sumi pro base.

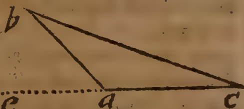
9. In omni triangulo tres anguli simul sumti sunt æquales duobus rectis. Sit triangulum *a b c*, dico angulum *a*, una cum angulo *c*, & ang. *a b c* respondere duobus rectis: nam si concipiamus lineam *b d* esse parallelam lineæ *ac*, hæ duæ lineæ parallelæ secantur per tertiam *b c*, & per consequens anguli alterni erunt æquales, id est, angu-



angulus *e* est æqualis ang. *c b d* (1 31.) Vlterius, linea *b a* incidens in lineas parallelas *b d* & *a c*, facit angulos internos ad easdem partes lateris æquales duobus rectis (1 32, id est, angulus *abd*, una cum angulo *a* est æqualis duobus rectis. Sed angulus *a b d* est compositus ex duobus angulis, quorum alter est *a b c* (unus ex numero trium angulorum ipsius trianguli) alter *d b c*, quem æqualem esse diximus ang. *c*. E. m. tres anguli, nim. *a b c*, una cum *c* & *a* duobus rectis æquales erunt; Q. E. D.

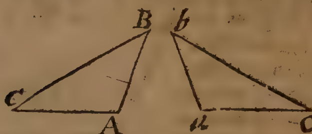



10 Producta basi cujuscunque trianguli, angulus externus est æqualis duobus internis oppositis. Sit triangulum *a b c*. & producatur latus *c a* ad *e*, habebis angulum *b a e*, qui appellatur angulus *externus* trianguli. Jam dico angulum hunc externum *b a e* esse æqualem duobus angulis *b* & *c*, qui sunt *interni oppositi*; nam hi duo anguli *b* & *c* cum tertio *b a c* simul sumti faciunt duos rectos, (per præced.) & similiter hic tertius angulus *b a c* cum angulo *b a e* facit etiam duos rectos: (1.20.) E. anguli *b* & *c* simul sumti tantum faciunt, quantum angulus *b a e*; Q. E. D.




11. Si

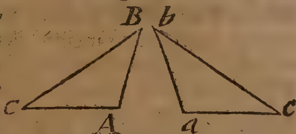
11. Si triangulum *ABC* habeat duo latera *AB* & *AC* æqualia duobus lateribus *a b* & *a c* alterius trianguli; & si præterea angulus *A* sit æqualis angulo *a*: dico tertium latus *BC* etiam esse æquale *b c* & angulum *B* angulo *b*, & *C* angulo *c*, & totum triangulum *ABC* toti triangulo *a b c*. Nam si concipiamus triangulum *a b c* esse superimpositum triangulo *ABC*, ita ut latus *a b* exacte respondeat *AB* quod illi æquale est, tunc etiam latus *a c* cadet super *AC*, quia supponitur angulum *a* esse æqualem angulo *A*; & sic punctum *c* cadet super *C*, quia *a c* est æquale *AC*: E. m. *b c* cadet super *BC*, & per consequens ipsi erit æquale; similiter angulus *c* erit æqualis angulo *C*, & angulus *b* angulo *B*, & totum rtiangulum toti triangulo, quoniam omnia ita sibi congruunt, ut triangulum superimpositum, neque excedat alterum, neque ab eo excedatur.




12. Figuræ, quæ sibi exacte respondent, si una superposita fuerit alteri, dicuntur figuræ *congruæ*, *quæ mutuo sibi congruunt*: & hoc est axioma generale, *quæ mutuo sibi congruunt, æqualia sunt.*

13. Etiã

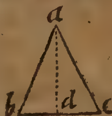
13. Etiam conversa præcedentis propositionis vera est; nimirum, si triangulum habet tria latera æqualia tribus lateribus alterius trianguli, omnes anguli unius etiam æquales erunt angulis alterius, & area seu spatium unius trianguli erit quoque æquale areæ alterius:



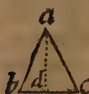

Vt si *AB* est æquale *ab*, & *AC*, *ac*, & *BC*, *bc*: dico angulum *A* esse æqualem angulo *a*, & *B* angulo *b*, & *C* angulo *c*, totumque triangulum *ABC* toti triangulo *abc*; quod non indiget probatione.

14. Si angulus *A* est æqualis ang. *a*, & angulus *B* ang. *b*, & latus *AB* lateri *ab*; erit etiam latus *AC* æquale lateri *ac*, & *BC* lat. *bc*, & totum triangulum *ABC* toti triangulo *abc*; quod facile probari potest per præcedentes.

15. In omni triangulo Isoscele duo anguli quos crura æqualia ad basin constituunt, sunt inter se æquales. Sit triangulum *abc*, cujus crus *ab* sit æquale *ac*, dico angulum *b* esse æqualem angulo *c*: nam si concipiamus basin *bc* esse divisam æqualiter in *d*, linea *ad* efficiet duo triangula *adc* & *adb*, & tria latera unius trian-



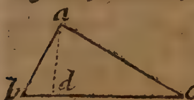

guli




guli erunt æqualia tribus lateribus alterius; nam *a c* est æquale *a b* per hypothesin vel suppositionem ipsius propositionis ; & *d c* *d b*, quia hic supponimus basin *b c* esse æqualiter divisam in *d*. Tertium latus *a d* est commune utrique triangulo : sic tria latera unius sunt æqualia tribus lateribus alterius, & per consequens totum triangulum *a d b*, & angulus *c* ang *b* ; (2.13.) Q. E. D.

16. In omni triangulo Isoscele, si linea cadens ex angulo verticis dividit basin bifariam, id est, in duas partes æquales, tunc ad eandem basin perpendicularis est, ac angulum quoque verticis bifariam secat : nam angulus *a d c* est æqualis ang. *a d b* per præcedentem : & per consequens uterque rectus est. & linea *a d* est perpendicularis ad *b c* (1.15.) Similiter angulus *d a c* est æqualis angulo *d a b*, per præcedentem.

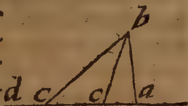
17. Omnis trianguli majus latus majorem angulum *subtendit*; id est, majori angulo oppositum est. Sit latus *b c* majus latere *a c* dico angulum *a* subtensum à latere *bc* esse majorem ang. *b*, qui subtenditur à latere *a c* : nam cum *b c* sit majus *c a*, concipe *c d* esse æquale *c a*, ita ut *a d c* sit triangulum Isosceles : Ergo (2 15.) angulus *c a d* erit æqualis angulo *c d a*. Sed angulus



gulus *c a b* est major angulo *c a d*, *totum enim est majus sua parte.* Ergo angulus *c a b* est major angulo *c d a*. Vlterius, cum angulus *c d a* sit externus respectu minoris trianguli *d a b*, major erit solo interno *b*: (2.10.)Ergo multo magis, angulus *c a b* erit major angulo *b*. Q. E. D.

18. Omnes triangulum necessario habere debet duos angulos acutos: nam si tantum unum haberet, reliqui duo essent vel obtusi, vel recti, vel unus obtusus & alter rectus. Sed nullum horum esse potest, cum (2.9.) omnes anguli simul sumti duos tantum rectos faciant.

19. Omnium linearum quæ duci possunt à puncto dato ad lineam datam, brevissima est perpendicularis & illæ sunt longiores, quæ magis recedunt à perpendiculari. Sit data linea *a d* & punctum datum *b*; sit præterea *b a* perpendicularis ad *d a*, à qua *b e* magis remota sit quam *b c*:



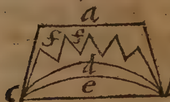

dico *b a* esse brevissimam omnium linearum possibilium, ex. gr. *b c*: & præterea, *b e* esse longiorem *b c*: Nam in triangulo *a b c* angulus *a* est rectus, & per consequens maximus omnium, quia reliqui duo necessario esse debent acuti: (2.18) Ergo latus *b c* est majus latere *b a*. (2.17) tanquam subtensum majori angulo. Similiter in triangulo

gulo *b c e* angulus *b c e* eſt obtuſus, quia angulus *b c a* eſt acutus, & per conſequens latus *b e* erit majus latere *b c* (2. 17.) tanquam ſubtendens majorem angulum.

20. In omni triangulo duo latera ſimul ſumta majora ſunt tertio. Sit triangulum *a b c*, dico latus *a b*, una cum *a c*, eſſe majus ſolo *c b*: Nam ſit producta *b a* & concipiatur *a d* æquale *a c*, erit triangulum *a d c* Iſoſceles, & per conſequens angulus *a c d* erit æqualis angulo *d*: (2. 15.) Ergo angulus *d c b*, qui major eſt ang. *d c a*, etiam major erit ang. *d*: Jam ſi conciperes *b d c* tanquam unum triangulum, latus *b d* erit majus latere *c b*, (2 17) tanquam ſubtenſum angulo majori. Sed *b d* eſt æquale duobus lateribus *b a*, *a c*, quia *a d* eſt æquale *a c*: Ergo duo latera *b a*, *a c* ſunt majora *b c*; Q. E. D.

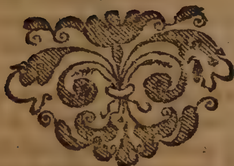



21. Etſi hæc propoſitio demonſtrata ſit, nihilominus pro principio natura noto admitti poteſt. Nam linea *c b*, cum ſit recta, facit viam breviſſimam à puncto *c* ad punctum *b*, dum interim reliquæ *c a b*, vel etiam *c d b* vel *c e b* circuitum faciunt, & per conſequens longiorem viam abſolvunt. Similiter illud cum Archime-

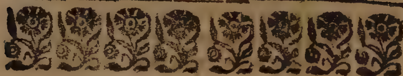



de

de pro principio ponere possumus, illarum linearum quæ tales circuitus faciunt, istas esse longiores, quæ suo ambitu alias circumscribunt vel includunt, & sic *c d b* esse longiorem *c e b*, & *c a b* longiorem *c d b*; quod tamen intelligendum non est de illo casu, ubi lineæ efficiunt figuram dentatam, ut in hac figura, ubi lineæ *c f f b* longiores esse possunt *c a b*, non obstante quod circumscribantur circuitu *c a b*.



LIBER



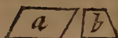
# LIBER TERTIUS.

## *De Quadrilateris, & Polygonis.*

I.

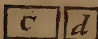
Figuræ terminatæ quatuor lineis rectis quatuor angulos efficientibus, appellantur *quadrilatera.*

2. Quando lineæ oppositæ sunt parallelæ, quadrilaterum appellatur




*parallelogrammum*, *a*; si non, appellatur simpliciter *Trapezium*, *b*.

3. Si parallelogrammum omnes quatuor angulos rectos habuerit, dicitur *parallelogrammum Rectangulum c*, vel



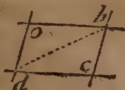

brevitatis gratia, *Rectangulum*: & si præter hæc etiam omnia latera sunt æqualia, dicitur *quadratum*, *d*.

4. Si omnia latera æqualia quidem sunt, anguli vero non, tunc parallelogrammum dicitur *Rhombus*.

5. Si parallelogrammum neque angulos neque latera æqualia habet, dicitur *Rhomboides*, *a*.

6. In-

6. In omni parallelogrammo anguli oppositi sunt æquales. Sit parellelogrammum *o b c d*, dico angulum *o* esse æqualem angulo *c*: nam angulus *o* est æqualis angulo exteriori *o* (1.31.) & *b* est æqualis *c*: (1.31.) ergo etiam *o* est æqualis *c*.



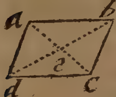

7. Linea ducta ex angulo ad angulum oppositum, dicitur *Diagonalis* vel *Diameter*, ut *b d*.

8. Omne parallelogrammum dividitur bifariam, id est, in duas partes æquales, per diagonalem. Diagonalis *b d* dividit parallelogrammum *o b c d* in duo triangula *o b d* & *b c d*. Probandum igitur erit hæc duo triangula esse æqualia. 1. angulus *o* est æqualis angulo *c*. (3. 6.) 2. angulus *o b d* est æqualis ang. *c d b*: (1.6.) & ob eandem rationem etiam angulus *o d b* est æqualis ang. *c b d*. Habent igitur hæc duo triangula omnes angulos reciproce æquales; & præterea, latus *b d* est commune utrique triangulo: E. etiam totum triangulum *o b d* est æquale toti triangulo *c b d* (2 14.)

9. In omni parallelogrammo latera opposita sunt æqualia inter se, quoniam totum triangulum *o b d* est æquale toti triangulo *d c b* per præcedentem: E etiam latus *c d* erit æquale lateri *b o* & latus *o d* lateri *b c*; Q.E.D.

10. Duo

10. Duæ diagonales *a c* & *b d* secant se mutuo in medio *e*: nam in triangulis *a e d* & *b e c*, latus *a d* est æquale lateri *c b* (3.9) angulus *e a d* est æqualis ang. *e c b*, (1.31) ob eandem rationem angulus *a d e* est æqualis ang *c b e*; (1.31) & ulterius angulus *a e d* est æqualis ang. *c e b*, (1.23.) quia ipsi ad verticem oppositus. E. latus *d e* est æquale lateri *b e* & latus *a e* lateri *c e* (2.14.) Sic igitur duæ diagonales sunt divisæ æqualiter in *e*.




11. Omnis linea recta *f g*, transiens per medium diagonalis *e* dividit parallelogrammum in duas æquales partes. Probandum est, trapezium, id est, quadrilaterum irregulare, *a f g d a* esse æquale trapezio, *c g f b c*. 1. triangulum *b e f* est æquale triangulo *d e g*: nam latus *d e* est æquale *e b* per hypothesin; angulus *f* est æqualis angulo *g*; (1.31.) angulus in *e* utrinque est æqualis, quia est oppositus ad verticem &c. E triangulum *f e b* est æquale triangulo *g e d*. (2.14.) 2. totum triangulum *a d b* est æquale toti *c b d*, (3. 8.) Ergo si de triangulo *a d b* auferatur parvum triangulum *f e b* & per compensationem ei iterum addatur triangulum *d e g*, resultabit trapezium *a f g d* æquale triangulo *a d b*, medietati f. semissi totius parallelogrammi. Q.E.D.



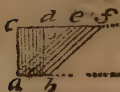

12. Si

12. Si in diagonali *bd* sumatur punctum *e*, perque illud transeant duæ lineæ lateribus parallelæ, nim. *gef* & *hei*; resultabunt quatuor parallelogramma, nim. *efbi*, *ehdg*; (& hæc duo appellantur *parallelogramma circa diametrum*) & reliqua duo parallelogramma *ebaf*, & *eicg*, quæ appellantur *complementa*: duo verò complementa cum uno parallelogrammo circa diametrum efficiunt figuram, quæ vocatur *gnomon*, quale hic est spatium lineis notatum.




13. In omni parallelogrammo *complementa* sunt æqualia. Probandum erit *ebaf* esse æquale *egci*. Totum triangulum *bad* est æquale toti triangulo *bdc* (3. 8.) Similiter triangulum *efb* est æquale triangulo *ebi*, (3. 8.) & etiam *ehd* est æquale *egd*: (3. 8.) Ergo si ab æqualibus triangulis *bda*, & *bdc*, auferantur æqualia, nimirum si auferantur ab una parte *efb*, & *ehd*, & ex altera parte *eib*, & *edg* restabit ab una parte parallelogrammum *ebaf* æquale parallelogrammo *eicg*, quod restat ab altera parte. Q.E D.

14. Parallelogramma quæ sunt super eadem basi, & in iisdem parallelis, sunt inter se æqualia. Sit parallelogrammum *abdc*, & aliud *abfe*, ita ut basis



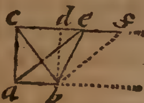

*a b* sit communis utrique, & linea *c d* producta transeat per *e f*; simulque hac ratione duo parallelogramma inter duas parallelas constituantur, nimirum inter lineam *a b* & lineam *c f*, parallelam lineæ *a b*: Dico parallelogrammum *a b d c* esse æquale *a b f e* 1. *c d* est æquale *e f*, quia tàm hæc quàm illa æquales sunt lineæ *a b*: (3. 9.) Ergò si hisce duabus lineis æqualibus addamus lineam *d e*; erit *c e* æqualis *d f*. 2. *c a* est æqualis *d b* (3.9) 3 angulus *a c e* est æqualis angulo *b d f*: (1.31) Ergò totum triangulum *a e c* est æquale toti *b f d*. Si jam de quovis horum triangulorum æqualium auferatur triangulum album *d e o*, quod est inter duo parallelogramma, & cuivis illorum etiam addatur triangulum lineis contrariis notatum *o a b*; resultabit ex hisce ab una parte parallelogrammum *a b d c* æquale parallelogrammo *a e f b*, ab altera parte constituto.

15. Parallelogramma, quæ sunt in eisdem parallelis *a b* & *c f* & super æqualibus basibus, alterum super *a b*, & alterum super *g h*, ita ut *a b* æqualis sit *g h*, sunt æqualia. Nam si quis concipiat tertium parallelogrammum *a e f b*, hoc æquale erit



erit *a b d c*, (3. 14.) quoniam est super eadem basi *a b*, & in iisd. parallelis *a b* & *c f*: Et idem hoc parallelogrammum *a e f b* etiam est æquale *g h f e* quia utrumque habet eandem basin nim *e f* (nihil enim refert sive basis sit in inferiori linea s. in superiori) & sunt in iisd. parallelis, nim. *f e*, & *b a*. Ergo etiam *h f e g* est æquale *a b d c*, quia sunt æqualia uni tertio *a e f b*.

16. Triangula super eadem basi *a b* & inter easdem parallelas *a b* & *c e* constituta sunt æqualia. Triangulum *a b c* est æquale triangulo *a e b*, quia si quis concipiat lineam *b d* parallelam *a c* & aliam *b f* parallelam *a e*, resultabunt duo parallelogramma *a c d b*, & *a e f b*, quæ cum sint super eadem basi & in eisdem parallelis, erunt æqualia. (3. 14.) Sed triangulum *a c b* est dimidium parallelogrammi *a c d b*, & triangulum *a e b* est dimidium parallelogrammi *a e f b*: (38) Ergo hæc duo triangula inter se sunt æqualia.




17. Triangula super æqualibus basibus constituta & in iisdem parallelis, inter se sunt æqualia. Demonstratio est facilis.

18. Si triangulum cum parallelogrammo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis, dimidium erit parallelogrammi. Triangulum *a b e* est dimidium parallelogrammi *a e f b*.

 19. Pen-

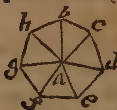
19. *Pentagonum* eſt figura quinque laterum & quinque angulorum. Si omnia latera ſunt æqualia, & omnes anguli æquales, pentagonum eſt *regulare*.

20. *Hexagonum* eſt figura ſex laterum & totidem angulorum; *Heptagonum* ſeptem; *Octogonum* octo &c. quæ quoque regularia ſunt, ſi omnes anguli & latera omnia inter ſe æqualia ſunt.

21. *Polygonum* in genere omnis dicitur figura, quæ pluribus comprehenſa lateribus, plures efficit angulos: ſed vocabulum hoc rarò adhibetur, niſi figuræ pluribus quam quatuor aut quinque lateribus conſtent.

22. Omne polygonum dividi poteſt in tot triangula, quot habet latera. Si intra figuram ſumatur punctum *a*, ubicunque id fuerit, & ex eo concipiantur ductæ lineæ verſus quemcunque angulum *a b*, *a c*, *a d* &c. tot erunt triangula, quot fuerint latera polygoni.

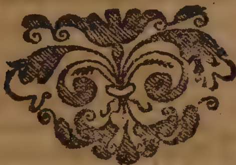
23. Anguli polygoni omnes ſimul ſumti conficiunt bis tot rectos, demtis quatuor, quot ſunt latera polygoni. E.gr. ſi polygonum habet ſeptem latera, quorum duplum eſt 14 ab iisque auferantur quatuor, reſtant decem: dico omnes angulos hujus heptagoni, nimirum angulum *c b h* una cum *b h g* & *h g f* &c. ſimul ſumtos eſſe æquales his decem angulis



rectis. Nam si ex puncto *a* ducantur ad angulos septem lineæ *a b*, *a c*, *a d* &c. ad constituenda septem triangula quodlibet horum triangulorum habebit tres angulos duobus rectis æquales :(2.9.)ita ut omnes anguli simul sumpti in septem triangulis æquales sint 14. rectis. Sed quodlibet horum triangulorum unum habet angulum circa verticem in puncto *a* ; ita ut, si omnes ponerentur circa hoc punctum, totum circuitum implerent. Ergo hi septem anguli coeuntes ad punctum *a* æquales sunt quatuor rectis, (1. 22.) & per consequens omnes reliqui anguli, qui conficiuntur ab ipsis lateribus heptagoni, æquales sunt decem rectis; Q E. D.

24 Polygonum etiam resolvi poterit in in triangula, ducendo lineas ab angulo ad angulum;sed tunc numerus laterum excedit numerum triangulorum duobus.





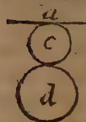


# LIBER QVARTVS

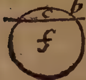
## *De Circulo.*

I.

Linea circulum *tangere* dicitur, quæ cum circulum tangat, non tamen eum secat, licet producatur ultra punctum contactus. Linea *a* tangit circulum *c* prout etiam circulus *c* tangit circulum *d*: sed in *b* linea circulum transit eumque secat.




2. Linea transiens per circulum, eum secat in duas partes, quæ appellantur *segmenta*, *c* est segmentum *minus* & *f majus*; hæc linea secans dicitur *chorda* & partes circuli sectæ *arcus*. Chorda cum arcu constituit in duobus extremis duos angulos mixtos, qui appellantur *anguli segmenti*, ut *c b f*.




3. Si in arcu segmenti sumatur punctum *c* ubicunque id fuerit, & concipiantur duæ lineæ *c a*, *c b*; illæ constituent ang. *a c b* qui vocatur *angulus in segmento*: & hic ang. *a c b insistere* dicitur arcui alterius segmenti inferioris,

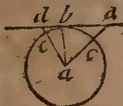



4. Sector

4. *Sector* circuli est triangulum mixtum, duabus semidiametris *a b*, *a c*, & arcu circuli *b c*, comprehensum. Sector hic notatus est lineolis.



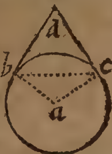

5. Si ad extremitatem semidiametri *a b*, concipiatur perpendicularis *b d*, illa tanget circulum in unico puncto *b*; & quodvis aliud punctum lineæ *b d* erit extra circulum situm. Ex. gr. punctum *d* est extra circulum; nam si concipiatur linea *a d* ducta ex centro, quæ secet circulum in puncto *c*, erit illa *a d* major *a b*, (2.19.) & per consequens major quam *a c*, quia *a c* est æqualis *a b*: (1.14.) E. punctum *d* cadit extra circulum. Q.E.D.




6. Chorda quædam *b c* dividitur bifariam per perpendicularem *a d*, per centrum *a* ductam; nam triangulum *a b c* est Isosceles, quoniam *a b* est æquale *a c*: (1.14.) E. perpendicularis *a d* secat basin *b c* in duas partes æquales (2.16.) Et arcus quoque *b c* est divisus bifariam.




7. Si duæ lineæ *d b* & *d c* tangant circulum, erunt æquales. Nam concipiantur à centro ad puncta contactus lineæ ductæ *a b* & *a c*, erunt hæ perpendiculares ad tangentes, (4.5.) Vlte-



terius, si concipiatur linea *b c*, angulus *a b c* erit æqualis ang. *a c b*: (2.15.) E. si ab æqualibus, i.e angulis rectis *a b d* & *a c d*, auferantur æqualia, i.e. angulus *a b c* ab una parte, & ang. *a c b* ab altera, erunt reliqui anguli æquales, i.e. *c b d* erit æqualis *b c d*, & per consequens latus *d b* erit æquale lateri *d c* (2.15.)

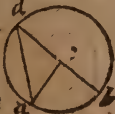
8. Duæ chordæ æquales *b c*, *e f* constituunt duo segmenta *b d c* & *e g f* æqualia, & lineæ quoque perpendiculares *a o* & *a n* æquales erunt. Quod facile probari potest.

9. Sit semidiameter *a b*, perpendicularis *b d* & alia linea *a c d* secans circulum in *c* & perpendicularem in *d*, nec non linea *c e* perpendicularis ad radium *a b*: omnes hæ lineæ gaudent certis nominibus. Linea *bd* terminata per *a d*, appellatur *tangens* arcus *b c*, ex.gr. 30°; linea *a d* vocatur secans ejusdem arcus 30°: linea *c e* dicitur *sinus* ejusdem arcus: & tandem *a b*, appellatur *sinus totus*, vel simpliciter radius.

10. Si in circumferentia circuli duo sumantur puncta *a* & *b* atq; ab illis lin. ducantur ad centrum *c*, & aliæ duæ ad aliud punctum *d* in circumferentia, duo constituentur an-

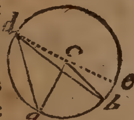
anguli, quorum alter *a c b* vocatur *angulus ad centrum*, alter *a d b angulus ad circumferentiam*.

11. Angulus ad centrum *a c b* semper duplex est anguli ad circumferentiam *a d b*. 1. Si una linearum, ut *b d*, transeat per centrum *c*, angulus *a c b* erit externus respectu trianguli *a c d* (2. 10.) & per consequens erit



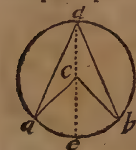

æqualis duobus angulis internis oppositis, nim. angulo *a d c* & ang *d a c*: (2. 10.) Sed hi duo anguli *a d c* & *d a c* inter se sunt æquales (2 15.) quia duo crura *c a* & *c d* sunt æqualia: (1. 14.) Ergo angulus *a c b* est duplex unius horum duorum nim. *a d c*; Q. E. D. 2. Si linea quædam *a d* vel *b a* non transeat per centrum *c*; concipiatur *d c e*, ita ut *e* sit extra arcum *a b*:

Tunc totus angulus *a c e* erit duplex anguli *a d e*, per casum primum hujus propositionis; & similiter angulus *b c e* est duplex anguli *b d e*:

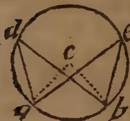



Ergo si de angulo *a c e* auferatur *b c e* & de angulo *a d e*, (qui est semissis anguli *a c e*) auferatur *b d e*, (qui etiam est semissis anguli *b c e*) erit residuum *a d b* dimidium *a c b*: quia axioma est, si quantitas est dupla alterius, & auferatur à majori duplum illius quod aufertur à minori, quod resi-

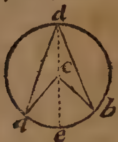
duum est in majori erit etiam duplum residui in minore: vel si totum totius est duplum, & ablatum ablati, erit & reliquum reliqui duplum. 3. Si punctum *e* cadit intra arcum *a b*, tunc angulus *a c e* erit duplex anguli *a d e* & angulus *b c e* erit etiam duplex ang. *b d e*, quod jam in primo casu hujus propositionis demonstratum erat, ergo angulus totus *a c b* est duplex ang. *a d b*.



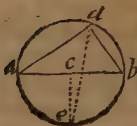

12 Omnes anguli qui insistunt eidem arcui *a b* sunt inter se æquales, in quocunque loco circumferentiæ etiam fuerit illorum punctum verticale. Angulus *a e b* est æqualis angulo *a d b*, quia uterque est semissis anguli *a c b*, qui est ad centrum *c*. (4.11.)




13. Angulus ad centrum *a c e*, insistens medietati arcus *a b* cui insistit alius angulus ad circumferentiam *a d b* est æqualis eidem angulo ad circumferentiam. (4. 11.)

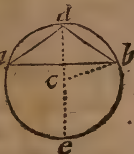



14 Angulus *a d b*, qui insistit semicircumferentiæ, est rectus; nam si *e* dividat bifariam semicircumferentiam *a e b*, angulus *a c e* erit

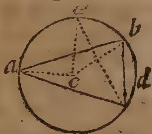


rit æqualis ang. *a d b* per præcedentem. Sed *a c e* eſt rectus: (1. 15.) E etiam *a d b* eſt rectus

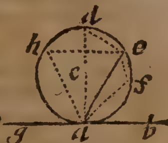
15. Angulus *a d b* in minori ſegmento eſt obtuſus, quia cum arcus *a e b* ſit major ſemicircumferentia, erit etiam arcus *b e*, qui eſt ſemiſſis arcus *a e b*, major 90. Et angulus *a d b* qui eſt æqualis angulo *b c e*, (4. 13.) erit major 90; id eſt, erit obtuſus.



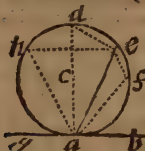

16. Angulus *a d b* in majori ſegmento eſt acutus: nam eſt æqualis angulo *a c e*. Sed cum arcus *a e b* ſit minor ſemicircumferentia, arcus *a e* qui eſt ſemiſſis *a e b*, erit minor 90. grad.




17. Si recta linea *g a b* tangat circulum in puncto *a* & alia linea *a e* ſecuerit eundem circulum, angulus *b a e* erit æqualis angulo in ſegmento oppoſito *a b e*: Et angulus *e a g* erit æqualis angulo in altero ſegmento *a f e*: Nam concipiatur perpendicularis *a d*, quæ tranſibit per centrum *c*, (4. 5.) quo ipſo angulus *a e d* erit rectus: (4. 14.) & per conſequens, quia tres anguli unius trianguli ſunt æquales

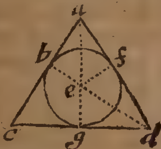


duobus rectis (2 9. angulus *e a d* unà cum angulo *a d e* constituet unum rectum, Sed idem *e a d* cum *e a b* etiam efficiunt rectum, quia *a d* est perpendicularis ad *a b*: E. angulus *e a b* est æqualis *a d e*, & per consequens omni angulo, qui insistet eidem arcui *a e* & punctum quodvis habuerit in circumferentia, ut ang. *e b a*, quia omnes hi anguli inter se sunt æquales; (4. 12) Et hæc est prima pars hujus propositionis. Nunc probandum est, angulum *e a g* esse æqualem ang. *a f e*; quæ est altera pars. In triangulo *a e f*, angulus *a f e* una cum *f a e* & *f e a* est æqualis duobus rectis, (2.9.) Sed angulus *f e a* est æqualis *f a b*, per jam demonstrata in parte prima hujus propositionis; nam linea *f a* considerari potest ut secans circulum & tangentem *b a*, in quo casu angulus *f a b* debet esse æqualis omni angulo, qui fieri potest in segmento opposito *f d b a*. Sed angulus *f e a* est in hoc segmento, quia insistit arcui *f a* & ejus punctum *e* incidit in punctum quoddam circumferentiæ *f e d b a*, ut ita angulus *f e a* æqualis sit ang. *f a b*. Porrò duo anguli *e a f* & *f a b* unà cum *a f e* sunt æquales duobus rectis. Sed iidem *e a f* & *f a b* unà cum *e a g* sunt etiam æquales duobus rectis: (1. 20) Ergo angulus *e a g* est æqualis ang. *e f a*, Q.E.D.



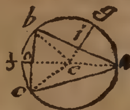

12. Fi-

18. Figura rectilinea *circa circulum describi* dicitur, cum singula latera ejus circuli peripheriam tangunt. Triangulum *a c d* circa circulum *b g f* descriptum est, quia quodlibet latus hujus trianguli tangit circulum in *b*, in *g*, in *f*.



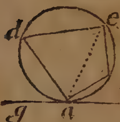

19. Figura *circulo inscribi* dicitur, cum singuli ejus anguli tetigerint circumferentiam, ut triangulum *a b c* in figura sequente.

20 Omne triangulum *a b e* inscribi potest circulo: nam si quis concipiat duas lineas *c i* & *c o*, quæ latera *a b* & *b e* perpendiculariter, & medio secent, tunc ex puncto *c* tanquam centro duci poterit circulus per punctum *b*. Sed dico hunc circulum quoque transiturum per puncta *a* & *e*: nam 1. duo triangula *c i b* & *ci a* erunt æqualia, quia latus *i b* est æquale lateri *i a* per hypothesin, latus *c i* est commune, & angulus ad *i* est utrinque rectus: Ergo (2. 11.) latus *c b* est æquale lateri *c a*. 2. Ob eandem rationem probari poterit latus *e c* esse æquale *e b*. Et per consequens circulus, cujus centrum erit *c*, & semidiameter *c b*, transibit per *a* & *e*.



21. Triangulum *a c d* (fig art. 18.) poteſt deſcribi circa circulum. Nam ſi concipiantur duæ lineæ *a e* & *d e*, qui dividant bifariam angulum *a* & *d*; Et poſtea quoque lineæ perpendiculares ad latera trianguli, nim. *e b*, *e f*, *e g*, dico, ſi quis circulum ducat ex centro *e* per *b*, hunc circulum tangere tria latera trianguli in punctis *b*, *f*, *g*. Nam 1. duo triangula *a e b*, *a e f* ſunt æqualia: Habent enim latus *a e* commune, angulum ad *b* & *f* rectum, & alium angulum ad *a* æqualem, quia angulus *b a f* eſt diviſus bifariam: Ergo latus *e b* eſt æquale lateri *e f*. (2. 14.) 2. Ob eandem rationem probari poterit *e g* eſſe æquale *e f*. Et quia hæ lineæ *e b*, *e f*, *e g* ſunt perpendiculares ad latera trianguli, circulus *b f g* tanget latera in his punctis. (4. 5.)

22. Omne quadrilaterum *a f e d* in circulo deſcriptum habet angulos oppoſitos ſimul ſumtos duobus rectis æquales. Nam ſi per punctum *a* ducatur tangens *g a b* & diagonalis *a e*, erit angulus *a f e* æqualis

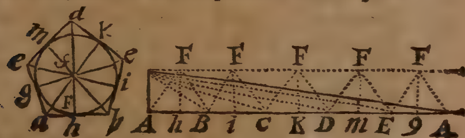



angulo *e a g*, (4. 17.) & angulus *a d e* angulo *e a b*; (4. 17.) & per conſequens quia duo *e a b* & *e a g* ſunt æquales duobus rectis, hi duo anguli oppoſiti *f* & *d* etiam æquales erunt duobus rectis. Similiter probari poterit, angulos *f e d* & *f a d* fore æquales duobus

bus rectis, si quis saltem concipiat aliam tangentem ad punctum *f*.

23. Conversa hujus propositionis etiam manifesta est; nim. omne quadrilaterum, cujus anguli oppositi sunt æquales duobus rectis, inscriptum esse circulo id est, posse habere circulum qui tangat omnes illius quatuor angulos.

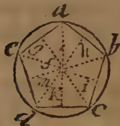
24. Omne polygonum circa circulum descriptum est æquale triangulo rectangulo, cujus unum crus esset æquale semidiametro circuli, & alterum toti circumferentiæ polygoni. Sit linea *F A* æqualis semidiametro *f b*, & perpendicularis infinita A B C D, &c. in qua sumatur A *b* æquale *a b* & *b* B æquale *b b* & *B i* æquale *b i* & *i C* æquale




*i c* &c. ita ut tota A B C D E A sit æqualis toti circumferentiæ polygoni *a b c d e a*. Ulterius sit *F F F* parallela A B, ita ut omnes perpendiculares *b* F, *i* F, *k* F, &c. sint æquales semidiametro *f b* vel *f i* &c. manifestum erit triangulum A F B esse æquale triangulo *a f b* & triangulum B F C triangulo *b f c* & CFD, triangulo *c f d* &c. Sic omnia hæc triangula simul sumta erunt æqualia toti polygono. Sed triangulum F A A est æqua-

æquale omnibus his triangulis simul sumtis, quia si ducantur lineæ B F, C F, D F, &c. triangulum F A B erit æquale triangulo F A B, & F B C æquale F B C &c. (3. 16.) Ergo etiam totum triangulum F A A est æquale polygono; Q.E.D.

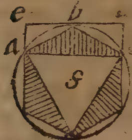
25. Omne polygonum regulare est æquale triangulo rectangulo, cujus unum crus esset tota circumferentia polygoni, & alterum perpendicularis aucta ex centro ad latera polygoni Demonstratio est eadem cum præcedente propositione. Nam omnia perpendicula $fb$, $fi$, $fk$, &c. sunt æqualia &c.



26. Omne polygonum circumscriptum est majus circulo, & omne polygonum inscriptum est minus illo. Quod manifestum est, quia id quod continet, majus est eo quod continetur.

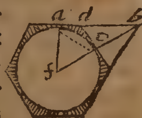
27. *Perimeter* (vel circumferentia) omnis polygoni circumscripti major est circumferentia circuli, & perimeter omnis polygoni inscripti est minor illa: hoc etiam manifestum est per 21. Libri secundi.

28. Si in minori segmento circuli $abc$ describitur triangulum Isosceles ita ut $ab$ sit æqualis $bc$: erit triangulum illud majus dimidio segmenti. Nam si ducatur tangens $ebd$, tunc erit



rit parallela ad *a c*, eft enim perpendicularis ad *f b* (4. 5.) cui etiam *a c* perpendiculas eft, (4. 6.) & præterea terminetur parallelogrammum rectangulum *a e d c*: erit hoc majus fegmento circuli *a b c*. Sed triangulum *a b c* eft femiffis parallelogrammi *a e d c*. (3. 18.) E. triangulum *a b c* eft majus dimidio fegmenti *a b c*.

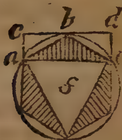
29. Sit tangens *a d b* & fecans *f c b*, & recta *a c*, ut & alia tangens *c d*; dico triangulum *d b c* excedere dimidium trianguli mixti, rectis *a b*, *c b* & arcu *c a* comprehenfi: nam cum in triangulo *d b c* angulus in *c* fit rectus, (4. 5.) latus *d b* erit majus latere *d c* (2. 17.) fed *d c* eft æquale *d a*: (4. 7.) Ergo *d b* eft majus *d a*: E. triangulum *c b d* eft majus triangulo *c a d*: (3. 17.) E. m. majus dimidio totius *c b a*. Sed triangulum *c b a* eft majus triangulo mixto, arcu *a c*, & rectis *b c*, *b a*, comprehenfo: E m. triangulum *d b c* eft majus dimidio trianguli mixti *a b c*.




3. Ex hifce duabus propofitionibus fequitur, quod fi multiplicata fuerint latera polygonorum regularium, exinde fieri poffe circumfcripta & infcripta, ita ut differentia, qua circumfcriptum excedet circulum, vel qua circulus excedet infcriptum, etiam pro lubitu minor reddi pof-

fit;

ſit; nam ſi de quacunque quantitate auferatur plus quam dimidium, & de reſiduo etiam plus quam dimidium, & iterum de hoc reſiduo plus quam dimidium & ſic aliquoties, tandem perveniemus ad reſiduum minimum deſideratum; quod natura notum eſt. Sic, poſtquam inſcriptum eſt triangulum, quod minus eſt circulo tribus magnis ſegmentis, adhuc inſcribi poteſt hexagonum, quod quidem majus eſt triangulo; ſed minus tamen eſt circulo ſex parvorum ſegmentorum, quæ in adjecta figura alba ſunt. Sed hæc ſex parva ſegmenta ſimul ſumta non continent tantum ſpatium, quantum ſemiſſis trium priorum ſegmentorum (4. 28.) Et licet adhuc inſcribi poſſit dodecagonum, quod circulus excedet duodecim parvis ſegmentis; nihilominus duodecim hæc ſimul ſumta non æquivalent ſemiſſi ſex ſegmentorum hexagoni; & ſic, multiplicando latera polygoni, pro lubitu quis diminuere poteſt differentiam, qua circulus excedet polygonum inſcriptum. Similiter, poſtquam triangulum circumſcriptum eſt, adhuc circumſcribi poteſt hexagonum, poſtea dodecagonum, & figura viginti quatuor laterum &c.




31. Omnis

31. Omnis circulus est æqualis triangulo rectangulo, cujus unum crus (ex. gr. perpendiculum) est semidiameter, & alterum (ex. gr. basis) est linea recta, æqualis circumferentiæ circuli. Nam triangulum hoc erit majus quovis polygono inscripto, & minus quovis polygono circumscripto: (per 24. 25. 26. & 27. lib. 4) E. erit æqualis circulo. Nam si esset majus, tunc licet minima esset differentia, adhuc tamen construi posset polygonum circumscriptum, cujus differentia à circulo minor esset differentia ejusdem circuli & trianguli rectanguli: & sic polygonum circumscriptum esset hoc triangulo minus, quod absurdum est. Similiter, si triangulum hoc esset minus circulo, construi adhuc posset polygonum inscriptum, quod majus esset hoc triangulo; quod est impossibile.

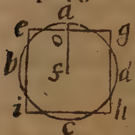
Hoc *genus demonstrationis, quod nunc adhibemus &* per impossibile *appellatur, inter pulcherrima veterum inventa numeratur; tota quippe Geometria* indivisibilium *in eo fundatur: ita ut mirari necessum habeamus, quosdam recentiorum autorum eam rejecisse tanquam mancam & indirectam. Quod si vero quispiam tam delicati fuerit ingenii, ut nullam demonstrationem perferre possit, quæ non concludat directe & positive, tunc facile erit eam convertere in regularem & directam: Nam saltim id pro principio ponere*

*debe-*

*debemus, quod* si duæ quantitates determinatæ $a$ & $b$ tales fuerint, ut quævis alia quantitas conceptibilis, quæ major vel minor esset quam $b$, etiam major vel minor esset quàm $a$, tunc duæ quantitates $a$ & $b$ erunt æquales. *Posito hoc principio, quod reverà ex se manifestum est, probari poterit directè, triangulum illud esse æquale circulo, quoniam quævis figura, quæ saltim concipi potest (inscripta) minor circulo, etiam minor est triangulo; & quævis figura (circumscripta) major circulo, etiã major est triangulo.*

*Hoc est, quod* quadraturam circuli *appellant, quæ consistit in eo, ut constituatur quadratum, vel triangulum, vel quævis figura rectilinea æqualis circulo; quod fieret, si inveniri posset linea recta æqualis circumferentiæ, ceu videre est in ipsa propositione; sed hæc æqualit. nunquam inventa est Geometr.*

32. Linea disposita circulariter, plus spatii continebit, quam quævis alia figura polygona regularis, quæcunque etiam illa fuerit. Si circumferentia circuli $a\ b\ c\ d$ disponeretur in formam quadrati vel alterius polygoni regularis, ita ut omnia latera $e\ g$, $g\ h$, $h\ i$, $i\ e$, simul sumta, æqualia sint circumferentiæ $a\ b\ c\ d$; dico circulum esse majorem polygono. Nam circulus est æqualis triangulo, cujus unum



num latus eſt circumferentia, & alterum ſemidiameter *f a*: polygonum v. eſt æquale triangulo, cujus unum latus etiam eſt eadem circumferentia *a b c d* (vel latera *e g b i*) & alterum latus *f o* (4.25.) Et quemadmodum *f o* minus eſt quam *f a*, ſic totum triangulum ſecundum æquale polygono, erit minus primo triangulo, quod æquale eſt circulo: & per conſequens polygonum hoc erit minus circulo; Q.E.D.

*Hoc eſt quod volunt, quando communiter dicunt, inter omnes figuras* Iſoperimetras, *vel quæ habent æquales circumferentias, maximam eſſe circulum.*



LIBER



# LIBER QVINTUS.

## *De Solidis.*

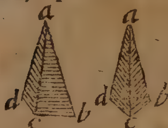
I.

LInea recta est simpliciter *recta* ad planum, vel *erecta* in plano *ad angulos rectos* quando neque in hanc neque in illam partem est magis inclinata, ut columna in pavimento.

2. Duo plana sunt parallela, quando omnes perpendiculares vel rectæ, inter plana ductæ, æquales sunt.

3. Planum est perpendiculare vel *rectum* ad aliud planum, quando neque in hanc neque in illam partem est magis inclinatum, ut murus in solo.

4. *Angulus solidus* oritur, quando tria vel plura plana se contingunt in uno puncto, ut punctum adamantis bene præparati.

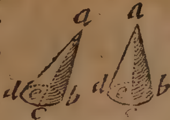



5. Si concipiatur linea *a b* fixa in puncto *a* & postea mota secundum longitudinem laterum polygoni *b c d*, describet ea per motum hanc figuram, quæ appellatur *Pyramis.*

6. Po-

6. Polygonum appellatur *basis* Pyramidis.

7 Si linea *a b* moveatur secundum longitudinem circuli *b c d*, describit *conum*, cujus *basis* est hic circulus; & linea ducta à vertice ad centrum circuli *e*, est *axis*.




8. Si linea *a b* moveatur uniformiter circa duo Polygona *b e d*, *a f g*, quæ sint secundum latera & angulos mutuo & in totum æqualia, ut & parallela, ita ut latera æqualia sibi respondeant parallela, *a f*, *a d*, *b c*, *f g*, *a d*, *e d* &c. tunc hæc linea per motum producet figuram, quæ dicitur *Prisma*: ejus polygona sunt *bases*.




9. Si bases prismatum sunt parallelogramma, appelatur *Parallelepipedum*.

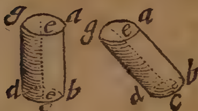
10. Si linea *a b* moveatur uniformiter circa duos circulos æquales & parallelos, describit *Cylindrum*.

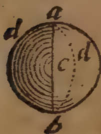



11. Linea quæ jungit centra *e e* basium, est *axis* cylindri.

12. In

12. In omnibus his figuris, quando axis est perpendicularis ad basin *d e c*, illæ appellantur Isosceles; Si verò axis est inclinata, sunt scalenæ.



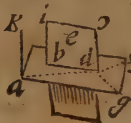




13. Si Semicirculus *a d b* revolvatur circa suam diametrum, describit *sphæram* vel globum, cujus *axis* est *a b*; *centrum c* idem est cum centro semicirculi. Omnis linea ducta per centrum *c* & utrinque terminata per superficiem sphæræ, appellatur *diameter* & dici potest *axis*.

14. Omnes lineæ ductæ à centro *c* ad circumferentiam, dicuntur *radii*, & sunt inter se æquales.

15. Duæ lineæ rectæ, quæ se mutuo secant, sunt in eodem plano. & per consequens omne triangulum etiam est in uno plano.

16. Si duo plana *e d b*, & *d a b* se mutuo secent, id fiet in linea recta *d b*, quæ appellatur *communis sectio*.




17. Si linea *c d* est perpendicularis ad duas lineas *f d* & *g d*, in plano *f g d* existentibus, illa etiam erit perpendicularis ad planum.

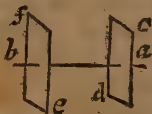
18. Si linea *c d* est perpendicularis ad tres *f d*, *g d*, *a d*, hæ tres lineæ sunt in uno plano.

19. Si duæ lineæ *d c*, *b i* sunt perpendiculares ad idem planum *f d b*, erunt illæ parallelæ.

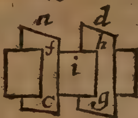
20. Si duæ lineæ *d c*, *b i* sint parallelæ, & ducatur quævis alia linea recta à quovis puncto unius lineæ ad alteram, ut *d b*, hæ tres lineæ erunt in eodem plano.

21. Si duæ lineæ *d c*, *b i* sint parallelæ tertiæ *a k*, licet illæ cum hac non existant in eodem plano, inter se tamen parallelæ sunt.

22. Si una atque eadem linea *a b* est perpendicularis ad duo plana *c d*, *e f*, tunc hæc sunt parallela.




23. Si duo plana parallela *d b g*, *a f e* secentur per planum aliquod tertium *i*, communes illorum sectiones *h g*, *f e*, sunt parallelæ.




24. Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur; ex his duo quilibet, utut assumti, tertio sunt majores.

*Omnes hæ propositiones tam manifestæ sunt, ut adhibita exigua attentione non necessum sit pluribus eas probare.*

52. Omnes anguli plani, qui angulum solidum constituunt, simul sumti sunt minores quatuor rectis. Nam si facerent quatuor rectos, non constituerent angulum solidum, sed planum. Ergo ut angulus solidus fieri possit, oportet angulos quatuor rectis minores esse.

*Suasor essem, ut anguli & figuræ ex charta construerentur, & hac ratione omnia facile comprehendi poterunt.*

26. In omni parallelepipedo plana opposita sunt æqualia: quod facile concipi potest.

*Octo sequentes demonstrationes demonstrabuntur in secunda parte elementorum. Nihilominus & hic demonstrari possint, si solidis saltim applicentur, quæ jam probata sunt de planis lib. 3. & 4. sed non opus est hisce diu inhærere.*

27. Parallelepipeda basibus æqualibus & planis parallelis contenta sunt æqualia. (vid. 3. 14.)

28. Omne parallelepipedum secatur in duo prismata triangularia æqualia ab ipso plano per duas diametros parallelas adversorum planorum.

29. Prismata triangularia super æqualibus basibus & inter easdem parallelas constituta, sunt æqualia.

30. Pyramides in basibus æqualibus, & in eisdem parallelis constitutæ, sunt æquales.

31. In

31. In genere omnia prismata, cylindri, coni, in basibus æqualibus & in eisdem parallelis constituti sunt æquales.

32. Pyramides & coni, qui habent bases æquales basibus prismatum & cylindrorum, & sunt in eisdem parallelis, erunt tertia pars prismatum vel cylindrorum.

33. Omnis sphæra est æqualis cono, cujus axis perpendicularis est semidiameter sphæræ, & basis planum æquale toti superficiei convexæ ejusdem sphæræ.

34. Inter omnes figuras solidas, quæ eadem superficie terminari possunt, maxima est sphærica.

35. Corpus *regulare* est, quod continetur figuris regularibus & æqualibus, gaudetque angulis solidis æqualibus, ut sunt,

36. *Tetraedrum* est contentum quatuor triangulis æqualibus & æquilateris, tale est pyramis, cujus basis est æqualis cuivis faciei seu lateri.

37. *Hexaedrum* seu *Cubus* constat sex quadratis æqualibus, prout sunt illi quibus ludimus.

38. *Octaedrum* est sub octo triangulis æqualibus & æquilateris.

39. *Dodecaedrum* est sub duodecim pentagonis æqualibus & æquilateris contentum.

40. *Icosaedrum* constat viginti triangulis æqualibus & æquilateris.

41. Vltra hæc quinque corpora regularia, impossibile est plura alia invenire; quod ita demonstratur:

Sumantur triangula æquilatera, quæ sunt inter figuras rectilineas simplicissima. Ad minimum tria requiruntur ad constituendum angulum solidum; sed his tribus conjunctis perfectum oritur tetraedrum: nam hæc triangula in unum punctum coeuntia, relinquunt basin triangularem similem & æqualem lateribus, ceu videre est ex compositione.

Junctis quatuor ejusmodi triangulis, oritur angulus Octaedri.

Ex quinque talibus triangulis resultat angulus Icosaedri.

Sex triangula simul juncta non possunt constituere angulum solidum, sunt enim æquales quatuor rectis: Sed omnis angulus solidus constat angulis planis, qui simul sumti minores esse debent quatuor rectis: (5. 25.) sic igitur impossibile est per triangula, alia corpora regularia conficere, præter illa tria:

Si jam assumamus quadrata, & tria simul jungamus, habebimus cubum; & non poterit aliud corpus præter cubum per quadrata constitui, quia si assumerentur quatuor quadrata & conjungerentur, non efficerent

rent angulum solidum, sed tantum planum. (5. 25.)

Si sumantur tria pentagona, resultabit angulus dodecaedri: sed quatuor pentagona non possunt constituere angulum solidum.

Tandem tria hexagona simul juncta, cum efficiant quatuor angulos rectos, angulum solidum constituere non possunt; & tria heptagona vel aliæ figuræ plurium laterum id multo minus præstare poterunt: Sic igitur non possunt plura præter hæc quinque corpora regularia construi, tria cum triangulis, unum per quadrata, & unum per pentagona.





# LIBER SEXTUS
## *De Proportionibus.*

I.

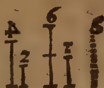
QUando loquimur *de magnitudine*, item quantitate *magna*, ſemper comparatio inſtituitur inter hanc quantitatem & aliam ejusdem naturæ, reſpectu cujus illa *magna* dicitur: Sic dicimus montem eſſe parvum, adamantem eſſe magnum, quia comparamus hunc montem cum aliis, in quorum comparatione *minor* eſt; & ſimiliter comparamus hunc adamantem cum aliis, in quorum comparatione hic eſt major.

2. Quando hac ratione conſideratur quantitas, ut inveſtigetur quantam *magnitudinem* illa habeat in comparatione ad aliam; tunc magnitudo quæ datur in comparatione ad aliam, appellatur *ratio*, vel ſi rem melius exprimere velimus *comparatio*.

3. Quantitas quæ refertur ad aliam dicitur *antecedens*, ea vero ad quam alia refertur, *conſequens*.

Sumantur quatuor quantitates, & com-

comparentur binæ & binæ *a* 4. cum *b* 2. & *c* 6. cum *d* 3. Si reperiatur *a* habere tantam *magnitudinem* in comparatione ad *b*, quam *c* in comparatione ad *d*: Tunc dicuntur hæ rationes æquales; i.e. ratio *a* ad *b* est æqualis rationi *c* ad *d*; Et ut *a* habet duplo majorem quantitatem quam *b*; sic etiam *c* duplo majorem habebit quam *d*.




5. Sed si reperiatur *a* 4. habere majorem quantitatem in comparatione ad *b* 2. quam *c* 6. in comparatione ad *e* 5. Ex. gr. Si reperiatur *a* 4. habere duplo majorem quantitatem quam *b* 2. *c* 6. vero non habere duplum in ordine ad *e* 5. tunc dicuntur hæ rationes inæquales, & *a* habet *majorem rationem* ad *b* quam *c* ad *e*; ita ut *habere majorem rationem* nihil aliud sit quam habere majorem quantitatem in comparatione ad secundam quantitatem, quam tertia non habet in comparatione ad quartam.

6. Æqualitas rationum appellatur *proportio*; & quando dantur quatuor quantitates, quarum prima habet tantam magnitudinem in ordine ad secundam, quantam tertia habet ad quartam, tunc hæ quatuor quantitates vocantur *proportionales*.

*Ut melius intelligamus totum mysterium proportionum, quæ inter difficillima Geometriæ referuntur, prout etiam revera sunt altioris indaginis; illas explicabo aliquo exem-*

*plo, quod solum meo quidem judicio rem intellectu facilem reddet, quæ tamen alias satis intricata videtur.*

7. Concipiatur circulus *b A d* per motum lineæ *a b* circa punctum *a* descriptus; & similiter sit circulus *c C e* per motum puncti *c*, quod est in linea *a c b*, descriptus; Concipiatur denuo eandem lineam *a c b* adhuc alia vice moveri usque ad *a e d*; arcus *b B d* appelletur *B*; arcus *c D e* appelletur *D*; totus circulus *b B A* nominetur *A*; totus circulus *c D C* vocetur *C*: Jam si comparemus ab una parte totum circulum *A* ad arcum *B*; & ab altera parte totum circulum *C* ad arcum *D*, manifestè apparebit, circulum *A* habere tantam magnitudinem in ordine ad arcum *B*, quantam circulus *C* habet in ordine ad arcum *D*; & si *B* est quarta vel 6ta pars circuli *A*. *D* etiam erit quarta vel sexta pars circuli *C*: quod hac ratione effertur, *ut se habet A ad B, sic se habet C ad D*, & brevitatis gratia nos sic notabimus *A. B :: C. D.*




8. Si jam rationem invertimus comparando *B* ad *A* & *D* ad *C* etiam manifeste videbimus, quod *B. A :: D. C.* ita ut supposito *A. B :: C. D*, subito conclusionem inferre possimus *invertendo*: Ergo *B. A :: D. C.*

9. Si instituamus alternationem comparando antecedens cum alio antecedente, & simi-

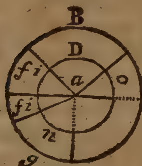
ſimiliter conſequens cum alio conſequente, concludemus *alternando*, Ergo *A.C*:: *B.D*. & hoc manifeſtum eſt: nam ſi totus circulus *A* eſt duplum vel triplum (vel quæcunque alia ratio ſit) circuli *C*, arcus *B* etiam erit duplum vel triplum (vel alia quævis ratio) arcus *D*. Hoc manifeſtum eſſe dico, quia duo circuli *A* & *C* deſcripti ſunt per motum lineæ *a c b*, ita ut dum *b* deſcribit totum circulum *A*, interea *c* deſcribat totum circulum *C*, & dum *b* deſcribit arcum *B*, interea *c* etiam deſcribat arcum *D* & hoc per unum communem motum circularem; niſi quod punctum *c*. dum tardius movetur quam punctum *b* etiam minorem circulum in proportione ad tarditatem deſcribat: Et ſimiliter dum punctum *b* abſolvit arcum *B*, punctum *c* pari modo deſcribit arcum *D*. qui erit minor in proportione tarditatis ſuæ.

10. Si comparemus differentias antecedentium & conſequentium cum ipſis conſequentibus; Ex. gr. *A* minus *B*, cum *B*, & *A* minus *D*, cum *D*, videbimus etiam hic dari proportionem & *A* minus *B.B*:: *A* minus *D. D*; nam manifeſtum eſt arcum *b A d* (qui eſt *A* minus *B*) ſe habere ad arcum *B*, ut arcus *c A è* (qui eſt *A* minus *D*) ſe habet ad arcum *D*: & hoc dicitur fieri *dividendo*.



11. Si conjungimus antecedentia & consequentia atque ea comparamus cum consequentibus, habebimus *A* plus *B*. *B*:: *A* plus *D*. *D*; quod dicitur fieri *componendo*.

12. Si concludimus *A*. *A* minus *B*:: *A*. *A* minus *D*, hoc dicetur fieri *convertendo*.




13. Si sumantur plures quantitates quæ sint proportionales binæ ac binæ *B.f*:: *D.i* & *f g*:: *i.n* &c. tunc possumus concludere sumendo primas & ultimas, *B.g*:: *D n*; & dicetur ratio *ex æquo ordinata*.

Propositio quæ sequitur paulò intricata est, sed non est magni momenti & omitti potest.

14. Sed postquam sumsimus *f.g*:: *o.D*, id est, ut se habet penultima ad ultimam in primo ordine: sic alia quædam quantitas *o* se habet ad primam secundi ordinis, tunc concluditur: Ergo *B. g*:: *o. i*, id est, ut prima ad ultimam in primo ordine: sic hæc alia quantitas *o* ad penultimam secundi ordinis: & hæc comparatio appellatur *ex æquo perturbata*. Verum hoc semper concludi potest: nam quia *f g* vel *i. n*:: *o. D* etiam erit *alternando* & *invertendo* *o. i*:: *D. n*. vel :: *B. g*.

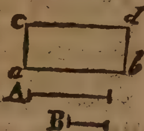
15. Si sumatur *B* tam multiplex quam *D*. ex. g. 3. *B*. & 3 *D*. concludemus *B. D*:: 3 *B*. 3 *D*.

Et

Et similiter :: 10 *B.* ad 10 *D.* vel etiam :: $12\frac{1}{2}$ *B.* ad $12\frac{1}{2}$ *D;* Et sic quacunque ratione multiplicentur hæ duæ magnitudines *B* & *D.* si modo æqualiter multiplicentur, tunc semper prodibit eadem ratio inter magnitudines æqualiter multiplicatas & magnitudines simplices. Magnitudines æqualiter multiplicatæ appellantur *æque multiplices* simplicium *B* & *D*, & *æque multiplices* inter se esse dicuntur ut simplices.

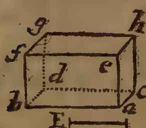
16. Si dividatur *B* eadem ratione ac *D* & sumatur ex gr. pars quarta de *B*, & quarta pars de *D*, vel etiam decima à *B* vel decima a *D*, vel alia quævis pars; Hæ partes habebunt eand. rationem inter se ac tota. *B.D* :: $\frac{1}{4}$*B.* $\frac{1}{4}$*D* :: $\frac{1}{10}$*B.* $\frac{1}{10}$*D.* &c. Hæc omnia naturâ nota sunt.

17. *Multiplicare* lineam per aliam lineam, est producere parallelogrammum rectangulum, quod pro duobus lateribus contiguis has duas lineas habet. Ex. gr. multiplicatur linea *A* per lineam *B*, & fit rectangulum *a b c d*, ita ut *a b* vel *c d* sit æquale *A*, & *b d* vel *a c* sit æquale *B*.

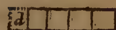



18. Multiplicare rectangulum vel aliam superficiem per lineam, est nihil aliud quam

producere parallelepipedum (5. 9.) cujus basis sit hæc superficies & altitudo perpendicularis hæc linea. Ex.gr. multiplicatur superficies *a b d c* per lineam *E*, & fit solidum *a b f g h* &c. ita ut basis illius sit superficies *a d*, & altitudo *a e* vel *b f* æqualis E.

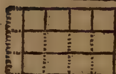


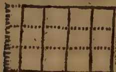

19. Vt has multiplicationes bene concipere possimus, necessum est imaginari duas lineas, ac si haberent latitudinem, atque earundem totam longitudinem dividere in parva quadrata, ceu vides in his figuris, ubi *A* est linea, vel potius regula constans tribus parvis quadratis, & *B* est alia regula constans quatuor parvis quadratis ejusdem latitudinis cum tribus quadratis regulæ *A*. Jam igitur multiplicare *A* per *B*, vel *B* per *A*, est nihil aliud, quam sumere regulam *B* toties, ac sunt quadrata in *A*, vel etiam sumere *A* toties, quot sunt quadrata in *B*: quod ad idem recidit. Sic *B* sumtum ter efficit primum rectangulum, quod continebit duodecim quadrata: & *A* sumtum quater constituet secundum rectangulum, quod etiam continebit duodecim quadrata, & erit in totum æquale primo.







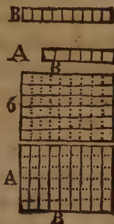



20. Nos

20. Notandum est, eandem multiplicationem nihilominus fieri, etiamsi in longitudine lineæ non exacte inveniatur certus numerus parvorum quadratorum, ut si in *A*, ex. gr. essent tria quadrata & in *B* quatuor & dimidium, vel quatuor, & alia pars aut excessus quicunque, hic notatus per *d*; tunc *B* ter saltim sumitur, ut multiplicatio fiat *B* per *A*, & compositum erit primum rectangulum duodecim quadratorum & trium excessuum seu particularum *d*. Similiter multiplicando *A* per *B*, id est, sumendo *A* quater cum dimidio, vel quater cum tali excessu *d*, resultabit secundum rectangulum etiam constans duodecim quadratis & tribus *d*.

21. Si concipiamus lineam *B* ad dimidium se contrahere, ita ut, manente longitudine semper eadem, postea habeat octo parva quadrata, (id est, longitudo sit octies major latitudine,) etiam sequetur, si eadem ratione se contrahat latitudo *A*, dari in illa sex parva quadrata: ita ut si nunc multiplicetur *B* per *A*, vel *A* per *B*, orientur duo rectangula in totum æqualia duobus prioribus. Nam *B* sumta sexies facit primum rectangulum constans 48. quadratis; & *A* sumta octies facit secundum rectangulum



gulum etiam constans 48. quadratis; & hæc 48. quadrata nec plus nec minus valent quam duodecim illa præcedentis rectanguli, quia unum horum duodecim respondet quatuor ex 48, ceu in figura videre est, sic quæcunque tandem latitudo etiam minima hisce lineis detur, eas in infinitum contrahendo, manifestum erit, rectangula quæ per multiplicationem ab illis producuntur semper esse eadem. Hinc audacter lineæ ut indivisibiles assumi & inter se multiplicari possunt, cum ex illis rectangulum efficiendum est, quia nunquam magnitudo hujus rectanguli variatur, licet vel minima latitudo lineis relinquatur.

22. Facillimum est omnia hæc applicare multiplicatione solidorum: sed loco quadratorum, concipi debent cubi: nam si concipiatur superficies constans duodecim cubis, & ex altera parte linea constans duobus cubis, multiplicari poterit superficies duodecim cuborum per lineam duorum, sumendo eandem superficiem toties, quot sunt parvi cubi in linea, id est, bis, & tunc resultabit solidum constans viginti quatuor parvis cubis.

23. Ex his omnibus apparet hæc parva quadrata & cubos in multiplicatione linearum & superficierum, respondere unitatibus in multiplicatione numerorum: nam multiplicare numerum per alium,

ex.

ex. gr. 3 per 5, nihil aliud est, quam sumere 3 toties, quot sunt unitates in 5, vel sumere 5 toties, quot sunt unitates in 3. & productum erit 15. Sicut multiplicare lineam per aliam, est sumere alteram illarum toties quot sunt quadrata in altera; & multiplicare superficiem per lineam, est sumere superficiem toties quot sunt cubi in linea.

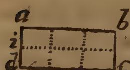
*Alio in loco sermo erit de multiplicatione superficierum per superficies, vel per solida, ex qua resultant composita; quæ appellantur* plurium quam trium dimensionum.

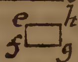
14. Omnes magnitudines exprimi possunt lineis: ut si magnitudo quædam dupla est vel tripla alterius, vel in quacunque alia ratione, saltim sumantur duæ lineæ, quarum altera dupla sit vel tripla alterius, vel in quacunque alia ratione simili cum ratione magnitudinum. Sic ad exprimenda duo tempora, ex gr. horam & duas horas; vel m. duas accelerationes sive velocitates, quarum altera sit dupla alterius, saltim sumantur duæ lineæ *a* duplo *b*, & poteris dicere *a* repræsentare duas horas, vel majorem accelerationem, & *b* respondere uni horæ vel minori accelerationi, & cum illis lineis agere ac cum ipsis horis &c.

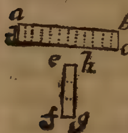
25. Ad cognoscendam proportionem rectangulorum, necessum est scire rationem longitudinis unius ad longitudinem alterius, & præterea rationem latitudinis unius

ad

ad latitudinem alterius, ex. gr. ad cognoscendam rationem rectanguli *a c* ad rectangulum *e g*, non sufficit scire longitudinem *a b* esse triplam long. *e b*, sed præterea scire debemus *a d* esse duplam *e f*: nam si sumatur *a i* æqualis *e f*, rectangulum *b i* erit triplum rectanguli *e g*, quia *a b* est tripla *e b*, & *a i* æqualis *e f*. Et ulterius, quemadmodum *i d* etiam est æqualis *a i*, vel *e f*, ( quia supponitur *a d* esse dupla *a i* vel *e f*, ) rectangulum *i c* etiam erit triplum rectanguli *e g*. Sic totum rectangulum *a c* est bis triplum rectanguli *e g*, id est sextuplum, sive continet sexies rectangulum *e g*. Quod dico de ratione dupla & tripla latitudinum & longitudinum, idem quoque intelligi debet de quavis alia ratione: nam si *a b* est quadrupla *e b* & *a d* tripla *e f*, rectangulum *a c* erit ter quadruplum rectanguli *e g*, id est, duodecuplum ipsius *e g*, vel continebit illud duodecies. Sed si *a b* est duodecupla *e b*, & *e f* tripla *a d*; tunc fiet certa compensatio. Nam si respectus saltim habeatur ad solas latitudines *a b* & *e b*, rectangulum *a c* illud superat & duodecies æquat; ab altera parte nihilominus amittit hunc excessum in altitudinibus *a d*



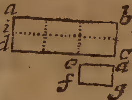




&

& *e f*, dum rectangulum *e g* alterum æquare debet tribus vicibus. Si jam comparemus excessum & defectum, cum rectangulum *a c* sit ab una parte duodecies majus, & ab altera parte tribus vicibus minus, restat illiud tantum esse quatuor vicibus majus *e g*.

26. Hoc intelligimus, quando dicimus rectangula esse in *ratione composita* laterum: nam si *a b* est tripla *e h* & *a d* dupla *e f*, rectangulum *a c* habebit rationem compositam tripli & dupli ad rectangulum *e g*, id est, erit bis triplum, vel ter duplum, vel uno verbo sextuplum. Similiter si *a b* est quadrupla *e h*, & *a d* tripla *e f*, rectangulum *a c* habebit rationem compositam quadrupli & tripli ad rectangulum *e g*, id est, erit ter quadruplum, vel quater triplum, vel uno verbo duodecuplum. Similiter si *a b* est duodecuplum *e h*, & *a d* subtriplum *e f* (id est, *e f* sit triplum *a d*) ratio rectanguli *a c* ad rectangulum *e g* erit composita ex ratione duodecupla & ratione subtripla, i. e. *a c* erit duodecies subtriplum, vel vice versa, vel uno verbo quadruplum *e g*.




*Si tertia pars thaleri duodecies sumatur, resultant quatuor thaleri; ita ut quatuor thaleri sint duodecies subtriplum thaleri, i. e. faciunt duodecies tertiam partem thaleri.*

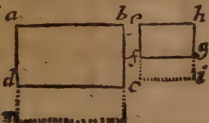
27. Ex-

27. Exinde apparet, si latera duorum rectangulorum sunt reciproce proportionalia, rectangula esse æqualia: nam si *a b* est dupla *e b*, sit vero reciproce *b g* dupla *b c*, vel etiam si *a b* est tripla *e b*, & *b g* tripla *b c*, vel quamcunque tandem rationem habuerit *a b* ad *e b*, eandem etiam habeat *b g* ad *b c*, manifestum erit, quantum rectangulum *a c* excedit alterum in longitudine, tantum idem excedi in latitudine. Dum sic longitudo compensat latitudinem, inter se sunt æqualia. Exinde deducitur hæc propositio maximi momenti.

28. Si sunt quatuor magnitudines proportionales, id quod provenit ex multiplicatione duarum mediarum, semper æquale est ei, quod producitur ex multiplicatione duorum extremorum; ut si *a b*, *e b* : : *h g*, *b c*, dico, ex multiplicatione *a b* & *b c*, oriri rectangulum *a c*, & ex multiplicatione mediarum *e b* & *h g*, oriri rectangulum *e g*, & hæc duo rectangula *a c* & *e g* esse æqualia. (6.27.) Quod fit per lineas & rectangula, fieri potest per quamcunque aliam magnitudinem, quia omnes magnitudines possunt exprimi per lineas, & omnes multiplicationes magnitudinum per multiplicationes linearum, i. e. per rectangula. (6.24.)

29. Quan-

29. Quando rectangula habent latera proportionalia, ita ut *a b*, *e h* : : *ad*, *e f*, tunc dicitur rectangulum *ac* esse in *ratione duplicata* laterum ad rectangulum *e g*: nam ratio *a c* ad *e g* est composita ex ratione *a b* ad *e h*, & ex ratione *a d* ad *e f*. (6.26.) Sed ratio *a b* ad *e h* hic est (per hypothesin) eadem cum ratione *a d* ad *e f*: Et sic ut habeamus rationem rectanguli *a c* ad rectangulum *e g*, sufficit bis sumere rationem *a b* ad *e h*. Ex. gr. Si, *a b* est dupla *e h*, & *a d* est dupla *e f*, rectangulum *a c* erit bis duplum, i. e quadruplum rectanguli *e g*. Et si *a b* est tripla *e h*, & *a d* tripla *e f*; erit *a c* ter triplum *e g*, id est, nonecuplum: Et si *a b* est quadruplum *e h*, erit *a c* quater quatruplum, i. e. sextecuplum *e g*.

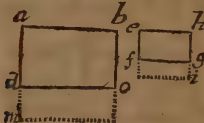



30. Si sumatur tertia quædam proportionalis *n o*, ita ut *a b*. *e h* : : *e h*, *n o*, duo rectangula *a c* & *e g* erunt ut lineæ *a b* & *n o*. Nam *a b* ad *n o* est in ratione duplicata *a b* ad *e h*. Et si *a b* est dupla vel tripla, vel quadrupla *e h*, erit *a b* bis duplum, vel ter triplum, vel quater quadruplum *n o*.

n ———— o

31. Rectangula illa, quæ hac ratione latera proportionalia habent. *a b*, *e h* : : *a d*, *e f*, appellantur *similia*: quorum latera

tera *homologa* sunt illa, quæ in proportione sibi respondent, ut *a b* & *e h* vel etiam *a d* & *e f*: nam si *a b* est latus maximum rectanguli *a c*, erit etiam *e h* latus maximum rectanguli *e g*.




32. Omnia quadrata sunt rectangula similia: nam manifestum est, si *a b* est dupla vel tripla *e b*; erit etiam *a m* dupla vel tripla *b i*, quia *a m* est æqualis *a b* & *b i* æqualis *e b*.

33. Rectangula similia inter se sunt, ut quadrata super illorum latera homologa constituta. Dico rectangulum *a c* esse ad rectangulum *e g*, ut quadratum *b m* ad quadratum *e i*: nam tam quadrata quam rectangula, sunt inter se in ratione duplicata *a b* ad *e h*. (6. 29. 31.)

34. Ad cognoscendam rationem duorum solidorum parallelepipedorum rectangulorum, necessum est scire rationem baseos unius ad basin alterius, & præterea rationem altitudinis unius ad altitudinem alterius. quia ratio unius solidi ad aliud composita est ex rationibus longitudinum, latitudinum, & altitudinum; quod facile intelligitur ex dictis de rationibus rectangulorum. Iam si parallelepipedum basin habet duplam baseos alterius parellelepipedi, &

alti-

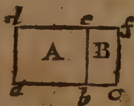
altitudinem triplam altitudinis, primum erit bis triplum, vel ter duplum, vel uno verbo sextuplum alterius.

35. Si bases duorum parallelopipedorum reciproce sunt ut illorum altitudines, parallelepipeda sunt æqualia. Hoc probatur ut vigesima septima hujus libri: nam quantum unum excedit alterum in latitudine & longitudine, tantum exceditur in altitudine.

36. Quando parallelepipeda rectangula habent omnia latera proportionalia, appellantur *similia* & sunt *in ratione triplicata* suorum laterum, ut diximus de parallelogrammis esse *in ratione duplicata.*

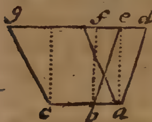
37. Parallelepipeda rectangula similiter inter se sunt ut cubi, super latera homologa constituti: nam tam cubi quam parallelepipeda sunt inter se in ratione triplicata laterum homologorum.

38. Rectangula quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se ut bases illorum. Sint rectangula *A*&*B* inter parallelas *d f*& *a c* constituta, ita ut *a d* æqualis sit *c f*: dico *A*. *B*:: *a b*, *b c* id est, rectangulum *A* esse ad rectangulum *B*, ut basis *a b* se habet ad basin *b c*. vt si, ex. gr. *a b* est dupla *b c*, *A* etiam erit duplum *B*; & si *a b* sit tripla, vel quadrupla *b c*; erit etiam *A* triplum vel quadruplum *B*: nam



nam *A* nihil aliud eſt quam linea *a b* multiplicata per lineam *a d* (6.17.) & *B* nihil aliud eſt, quam linea *b c*, multiplicata per eand. *a d* vel *b e* ipſi æqualem. E. (6.15.) *A.B*:: *b,b c*.

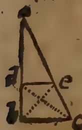
39. Omnia parallelogramma, quæ ſunt in eisdem parallelis, ſunt inter ſe ut illorum baſes. Dico parallelogrammum *a d e b* eſſe ad parallelogrammum *a f g c*, ut *a b* ad *a c*: nam conſtitutis rectangulis punctatis ſuper easdem baſes, erunt illa rectangula æqualia parallelogrammis. (3.14.) Sed hæc rectangula ſunt illorum baſes: (per præcedentem) E. parallelogramma etiam ſunt ut illorum baſes, nim. *a d e b*, *a f g c*:: *a b*, *a c*.




40. Triangula in eisdem parallelis conſtituta ſunt ut baſes; ſunt enim ſemiſſes parallelogrammorum.

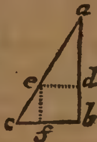
41. Quando triangula habent baſes ſuas in eadem linea recta, & eorum vertex incidit in idem punctum, tunc cenſentur eſſe inter easdem parallelas, ut *a d e* & *c d e*, vel etiam *a d e* & *b d e*.

42. Si in triangulo ducatur linea parallela ad baſin, hæc proportionaliter ſecabit trianguli crura. Sit triangulum *a b c* & linea *d e* parallela ad *b c*, dico *a d*. *a e* :: *a b*. *a c* & :: *d b*. *e c*. Nam ſi concipiantur

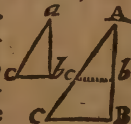


tur lineæ *c d* & *e b*, triangulum *c e d* erit ad triangulum *e a d*, ut *c e* ad *e a*: (6.40.41.) similiter triangulum *b d e* ad triangulum *d a e*, est ut *b d* ad *a*. Sed triangulum *c e d* est æquale triangulo *b d e*: (3.16.) E. etiam triangulum *b d e* sive *c e d* est ad triangulum *e a d* ut *b d* ad *d a* vel ut *c e* ad *e a*: ergo etiam *b d. d a :: c e. e a*, quia tam ratio *b d* ad *d a*, quam ratio *c e* ad *e a* exprimunt eandem rationem trianguli *b e d* vel *c e d* ad triangulum *e a d*.

43. Si in triangulo *a c b* ducatur linea *d e*, parallela ad basin *c b*, dico *e d. c b :: a d. a b* vel *:: a e. a c*: nam ducta *e f* parallela ad *a b*, erit *f b* æqualis *e d*. (3. 9.) sed per præcedentem *f b. c b :: e a. c a ::* ergo *e d, c b :: e a. c a* vel *:: d a. b a*.




44. *Triangula similia* appellantur illa, quæ habent omnes tres angulos æquales, id est, singulos hujus singulis alterius, licet triangula ipsa sint inæqualia. Ex. gr. si angulus *A* est æqualis ang. *a*, & angulus *B* ang. *b*, & ang. *C*. ang. *c*, totum triangulum *A B C* erit simile triangulo *a b c*.

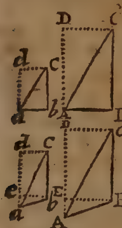



45. Si duo triangula habuerint duos angulos duobus angulis utrumque utrique æquales, etiam reliquus reliquo æqualis, & tiran-

triángula ipsa similia erunt: nam cum tres anguli in quovis triangulo efficiant duos rectos, (2.9.) necessum est, si duo anguli unius trianguli sunt æquales duobus rectis alterius trianguli, etiam tertium unius tertio alterius æqualem esse.

46. Omnia triangula similia habent sua latera (circa angulos æquales) proportionalia. Dico *AB. ab:: AC. ac:: BC. bc.* Nam si in majori triangulo *ABC* sumatur *Ab* æquale *ab*, & *Ac* æquale *ac*, triangulum *Abc* totum æquale erit triangulo *abc*; (2.11.) sic angulus *Abc* est æqualis ang. *abc* (2.11.) ergo etiam æqualis est angulo *B*, qui per hypothesin æqualis est ang. *b*: g. linea *bc* est parallela lineæ *BC*: (1.31.) Ergo (6.42.43.) *Ab. AB:: Ac. AC:: bc. BC.*

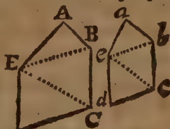
47. Omnia triangula similia, inter se rationem duplicatam habent suorum laterum homologorum. Sit *abc* simile *ABC*, ita ut *ab AB:: bc. BC.* Primo, si *b* & *B* sunt anguli recti, sint terminata rectangula *bcda*, & *BCDA*, hæc rectangula *bd* & *BD* erunt inter se in ratione duplicata lateris *bc*, ad latus homologum *BC*, vel ut quadratum super *bc* constitutum, ad quadratum super *BC*. (6.29. 33.) Sed triangulum *abc* est semissis rectanguli *bcd*, (3.8.) & triang. *ABC*




est

est semissis rectanguli *B C D.* (3. 8.) Ergo etiam hæc triangula sunt inter se in ratione duplicata laterum homologorum, &c. Secundò, si triangula non sunt rectangula, ut in figura secunda, sint ductæ parallelæ *a d* & *A D*, & postea sint constituta rectangula *b c d e* & *B C D E*, 1. triangula *a d c* & *A. D. C.* erunt similia, quia angulus *d* est æqualis angulo *D.* nimirum ambo recti. Et præterea, angulus *d a c* est æqualis ang. *D A C*, quia sunt æquales angulis *a c b* & *A C B:* (1.31.) Ergo *a c. A C::* *c d. C D.* (6.46.) Ergo *a c. A C:: b c. B C::* (per hypothesin) E. *c d. C D:: b c. B C:* & per consequens etiam rectangula *b d* & *B D* sunt similia (6. 31.) & inter se sunt ut quadrata suorum laterum homologorum: (6. 33.) Ergo etiam semisses illorum, id est, (3. 18.) triangula *a b c* & *A B C* sunt in ratione duplicata suorum laterum homologorum, vel ut quadrata &c.

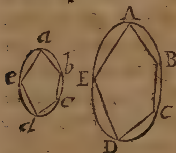
48. Polygona similia sunt, quæ habent æque multa latera, ita ut singuli anguli unius sint æquales singulis alterius polygoni, & latera illorum circa angulos æquales proportionalia, ut si angulus *A* est æqualis ang. *a*, & ang. *B* ang. *b*. &c. & præterea *A B. a b :: B C. b c ::* *C D. c d* &c. hæc duo polygona sunt similia.

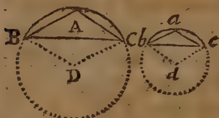





49. In-

49. Inter curvilineas vel mixtas figuras, *similes figuræ* sunt illæ, quibus inscribi vel circa quas describi possunt figuræ similes; ita ut polygonum, quod inscriptum fuit, vel descriptum circa unam, etiam alteri inscribi vel circumscribi possit simile. Ex. g. si pro lubitu inscribi aliquod polygonum *A B C D E*, majori curvilineæ figuræ, & etiam possum inscribere aliud simile minori curvilineæ, *a b c d e*, hæ duæ curvilineæ erunt similes. Similiter, si sumsissem duas mixtas, ut duo segmenta circuli *A B C* & *a b c*, & uni inscripsissem pro lubitu triangulum *A B C*, possem vero alteri simile *a b c* inscribere, erunt hæc duo segmenta similia; & absolutis circulis, hæc segmenta erunt æquales portiones circulorum, ita ut si arcus *B A C* est tertia pars sui circuli, etiam *b a c* erit tertia pars sui circuli: & si ad centrum ducantur lineæ *B D*, *C D*, *b d*, *c d*, anguli *D* & *d* erunt æquales. (Vid. 4. 11. & sequentes.)

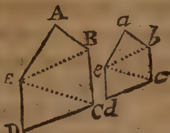



50. Omnes circuli sunt figuræ similes.

51. Omnia polygona similia dividi possunt in æqualem numerum triangulorum, simi-

similem. Sint polygona *A B C D E* & *a b c d e* & primum sit divisum in sua triangula per lineas *B E. C E:* (3. 14.) dico, si alterum quoque sit divisum per lineas *b e* & *c e*, omnia triangula unius erunt similia triangulis alterius.

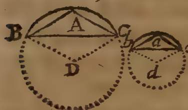



Ex.gr. *a b e* simile est *A B E*, nam angulus *a* est æqualis ang. *A*, (per hypothesin) & præterea *A B. a b* :: *A E. a e* :: (etiam per hypothesin) Ergo triangulum *A B E* est simile *a b e* (6. 46.) Porro probatur angulum *E B C* esse æqualem angulo *e b c*, quia angulus *A B C* supponitur esse æqualis *a b c*, & ceu jam probatum, angulus *a b c* est æqualis ang. *A B E*: si igitur ab æqualibus auferantur æqualia, angulus *E B C* æqualis erit angulo *e b c*. Similiter probatur angulum *e c b* esse æqualem *E C B* & per consequens (6. 45.) totum triangulum *e c b* erit simile triangulo *E B C*, & sic de reliquis.

52. Omnia polygona similia inter se sunt in ratione duplicata suorum laterum homologorum, sive ut quadrata super latera homologa constituta. Dico, ut quadratum *A B* se habet ad quadratum *a b*, sic totum polygonum *A B C D E* se habet ad polygonum *a b c d e*: nam cum omnia triangula unius polygoni similia

ſint triangulis alterius (6. 51.) erunt omnia hæc triangula unius polygoni ad omnia alterius in ratione duplicata laterum homologorum, quæcumque etiam illa fuerint, id eſt, ut quadratum *AB*, ad quadratum *ab*.

53. Omnes figuræ ſimiles, etiam curvilineæ, inter ſe ſunt ut quadrata ſuper latere quodam figurarum ſimilium ſive inſcriptarum ſive circumſcriptarum conſtituta. Sint ex. gr. circuli, quibus inſcripti ſint duo triangula ſimilia *bac* & *BAC*, dico totum circulum *ABC* ſe habere ad circulum *abc*, ut quadratum *BC* ad quadratum *bc*, ſive quod idem eſt, ut quadratum ſemidiametri *DB* ad quadratum ſemidiametri *db*: nam circulo *abc* (ſaltim cogitatione,) inſcribi vel conſcribi poteſt quodcunque polygonum. (4. 30.) Sed omne polygonum inſcriptum *abc* minorem rationem habebit ad circulum *ABC*. quam quadratum ſuper *bc* ad quadratum *BC*, & omne circumſcriptum circulo *abc* majorem rationem habebit ad circulum *ABC*, prout facile probari poterit per præcedentem & per ea, quæ dicta ſunt de circulo in libro quarto: E. &c.

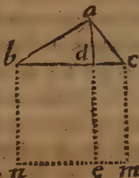



54. Omnia

54. Omnia hæc applicari possunt ad solida. *Solida similia* sunt illa, quæ habent angulos æquales & latera proportionalia, vel quibus inscribitur, vel circumscribitur &c.

55. Solida similia inter se sunt ut cubi, &c. Vid. 6. 36. 37. &c.

56. Si in triangulo rectangulo *a b c* ducatur ab angulo recto *a* perpendicularis *a d* in *hypotenusam* (sive latus maximum) *b c*, tria erunt rectangula inter se similia, nimirum *a d c*, *a d b* & totum *b a c*: nam 1. quodlibet horum trium triangulorum habet angulum rectum. 2. triangula *a b c* & *a b d* habent angulum *b* communem: E. sunt similia: (6.45.) 3. triangula *a b c* & *a d c* habent angulum *c* communem: E. sunt similia.




57. Perpendicularis *a d* est media proportionalis inter *c d* & *d b*, id est, ut *c d*. *d a* :: *d a*. *d b*. Nam cum triangula *c d a* & *a d b* sint similia per præcedentem, erit *c d* (crus minus trianguli *c d a*) ad *d a* (crus majus) ut *a d* (crus minus trianguli *a d b*) ad *d b* crus majus. (6. 46.)

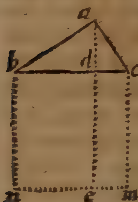
58. Quadratum *a d* est æquale rectangulo ex *c d* & *d b* constituto: nam cum *c d*. *d a* :: *d a*. *d b* (per præcedentem) rectan-

gulum extremorum *c d* & *d b* erit æquale rectangulo mediorum *d a* & *d a* (6. 28.) Sed cum duo latera hujus rectanguli sint æqualia, quia *d a* bis sumitur, sequitur rectangulum hoc esse quadratum *d a*: & sic propositio sequens generalis poni potest.

59. Quadratum mediæ proportionalis semper æquale est rectangulo extremorum.

60. Ad exprimendum rectangulum, sufficit tres literas adhibere. Ex. gr. *si ponitur rectangulum b d c*, tunc volumus exprimere rectangulum, cujus alterum latus est *b d* & alterum *d c*; & si diceretur *rectangulum b c d*, tunc vellemus exprimere rectangulum, cujus alterum latus esset *b c*, & alterum *c d*.

61. In omni triangulo rectangulo quadratum super *hypotenusa* (sive maximo latere) constitutum est æquale duobus quadratis *crurum*. (vel reliquorum laterum.) Si quadratum *b c m n* per perpendicularem *a d e* in duo rectangula *d e m* & *d e n* divisum; dico rectangulum *d e m* esse æquale quadrato *a c*, & rectangulum *d e n* quadrato *a b*; & per consequens totum quadratum *b c m n* esse æquale quadra-




dra-

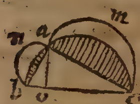
dratis *a c* & *a b*: nam 1. cum duo triangula *a d c* & *b a c* sint similia (6.56.) erit *d c* ad *a c* (in minori triangulo *a d c*) ut *a c* ad *b c*: (in majori triangulo *b a c*) ergo *a c* est media proportionalis inter *d c* & *b c* vel *c m*; sic quadratum *a c* est æquale rectangulo *d c m* (6. 59.) Ob eandem rationem probatur *b a* esse mediam proportionalem inter *b d* & *b c* vel *b n* &c.

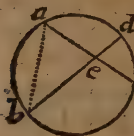
62. Si in tribus lateribus trianguli rectanguli constituantur tres figuræ similes, similiterque positæ, maxima erit æqualis duabus reliquis: nam cum figuræ hæ similes sint ut quadrata in lateribus homologis constituta, (6. 53.) figura *A* erit ad figuras *B* & *C*, ut quadratum *b c* ad quadrata *c a* & *a b*. Sed quadratum *b c* est æquale duobus reliquis: (per præcedentem) ergo, &c.

63. Si super maximo latere *b c* fiat semicirculus *b a c*, & super reliquis lateribus duo alii semicirculi *b n a*, & *a m c*; maximus semicirculus æqualis erit reliquis duobus. (per præcedentem.) Si ab utraque parte auferatur commune, segmenta nim. striata *b a* & *a e*; quod ab utraque parte reliquum, erit æquale; id est, triangulum *b a c* ab n-

na parte æquale erit duabus lunulis *b n a* & *a m c* ab altera parte: & hæc est *quadratura Lunarum Hippocratis.*

64. Quando triangulum *b a c* est Isosceles, lunulæ sunt æquales; ita ut triangulum *b a o*, semissis trianguli *b a c*, sit æquale cuivis lunulæ: sed quando triangulum est scalenum, ut in secunda figura, lunulæ sunt inæquales, & æque difficile est dividere triangulum *b a c* in duas partes per lineam *a o*, ut demonstrari possit triangulum *b a o* esse æquale lunulæ *b n a* & triangulum *o a c* lunulæ *c m a*; æque difficile est: inquam, hoc præstare, quam invenire quadraturam circuli.

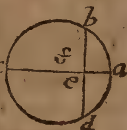


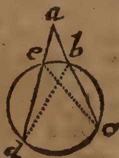

65. Duæ chordæ se secantes in circulo, habent sua segmenta *reciproca*, id est, reciproce proportionalia. Dico ut *a e. b e* :: *e d. e c.* & per consequens rectangulum *a e c* esse æquale rectangulo *b e d*: nam si concipiantur *d c* & *b a*, erunt duo triangula similia, *a e b* & *d e c*. Nam 1. habent angulum ad *e* oppositum ad verticem; (1. 23.) angulus *d* est æqualis angulo *a*, (4. 12.) quia insistit eidem arcui *b c* & in eadem circumferentia est:

eſt: Ergo hæc duo triangula ſunt ſimilia; ſic *ae.be*::*ed.ec.* (6. 46.)

66. Si *ac* eſt diameter circuli & *db* perpendicularis, erit *de* vel *be* media proportionalis inter *ae* & *ec*, quia *de* æqualis erit *eb* (4. 6.) ſic *ae. de*:: *be* vel *de. ec.* & quadratum *de* æquale rectangulo *aec.*

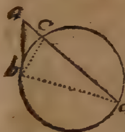



67. Duæ lineæ ductæ à puncto extra circulum aſſumto ad circumferentiam, ab eaque intus terminatæ, inter ſe ſunt reciproce ut illarum ſegmenta externa: Dico *ac. ad*:: *ae.ab* & per conſequens rectangulum *cab* eſſe æquale rectangulo *dae*: nam ſi concipiantur lineæ *bd* & *ec*, erunt duo triangula ſimilia *abd* & *aec*: nam 1. angulum *a* communem habent. 2. Angulus *d* eſt æqualis angulo *c*, (4. 12.) quia inſiſtunt eidem arcui *be*: Ergo triangula *abd* & *aec* ſunt ſimilia; (6.45.) ſic *ad. ac.* (quæ ſunt majora latera duorum triangulorum) :: *ab. ae.* (quæ ſunt minora latera eorundem triangulorum.)

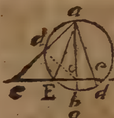


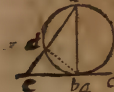

68. Si una harum linearum *ab* tangat circulum in *b*, dum interea altera eundem ſecat in *e* & *d*, tunc *ab* eſt media propor-

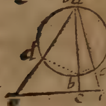
tionalis inter *a e* & *a d:* nam ductis lineis *b e* & *b d*, triangula *a b d* & *a e b* erunt similia, quia 1. angulum *a* communem habent. 2. Angulus *a b c* est æqualis angulo *b d e* (4.17.) cum ergo hæc duo triangula similia sint, *a e. a b* :: (quæ sunt duo latera minoris trianguli *a b e*) :: *a b. a d* (quæ sunt latera homologa alterius trianguli *a d b*.)



69. Sit diameter *a b* secata in *c* per perpendicularem infinitam *c e*, vel intra circulum, ut in prima figura, vel in circumferentia ut in secunda figura, vel extra circulum, ut in tertia figura: sit præterea ex puncto *a* pro lubitu ducta linea recta, secans perpendicularem in *e*, & circulum in *d*; dico semper *a d. a c* :: *a b. a e.* Nam si ducatur linea *b d*, erunt duo triangula similia *e a c* & *d a b*, quia 1. angulum habent communem *e a c* & *d a b*. 2. etiam rectum habent; nam ang. *a c e* rectus est (per hypothesin) & ang. *b d a* quoque est rectus (4. 14.) ergo hæc duo triangula sunt similia *a d a c*: *a b. a e*.



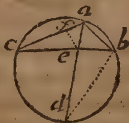




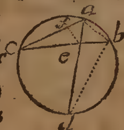
70. In

70. In secunda figura *a b* semper est media proportionalis inter *a d* & *a e*, & in prima, media est *a E*, ubi circulus lineam *c e* secat.

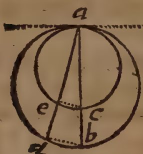
71. Si in triangulo inscripto, angulus *b a c* est divisus bifariam, id est, in duas partes æquales, per lineam *a e d*. Dico *b a. a e :: a d. a c*; nam ducta linea *b d*, erunt duo triangula similia *a b d* & *a e c*, quia 1. angulus *d* est æqualis angulo *c*. (4. 12.) tanquam insistens eidem arcui *a b* & in eadem circumferentia. 2. angulus *b a d* est æqualis angulo *e a c* per hypothesin: Et hæc duo triangula sunt similia: & propterea *a b a d :: a e. a c.*




72. Quando angulus in vertice ita divisus est in duas partes æquales, segmenta basis sunt proportionalia cum lateribus *b a. a c :: b e. e c*: nam concipiatur *e f* parallela ad *b a*, tunc erit *b a. a c :: e f. f c*. Sed *e f* est æqualis *a f*, quia ang. *a e f* æqualis est ang. *e a b*. (1.31.) & per consequens angulo *e a f*: sic triangulum *a f e* est Isosceles; (2.15.) & vice hujus comparationis *b a. a c :: e f. f e*. ponere possumus hanc *b a. a c :: a f. f c*. vel etiam (6. 42.) *b e. e c*. Q. E. D.



73. Si duo circuli ſe intus contingant, & ex puncto contactus *a* ducatur tangens, &




perpendicularis *a c b*, quæ per centra duorum circulorum tranſibit; (4. 5.) & præterea quævis alia linea ſecans duos circulos in *e* & *d*. Dico ſemper *a e*. *a d* :: *a c*. *a b*: nam ductis lineis *e c* & *d b*, triangula *a e c* & *a d b* erunt ſimilia, cum habeant ang. communem in *a* & alium rectum in *e* & *d*. (4. 14.)

74. Etiam arcus *e c* erit ad arcum *d b*, ut totus circulus *a e c* ad circulum *a d b*. (6. 49. & 4. 11. &c.)



LIBER



# LIBER SEPTIMVS

## *De Incommensurabilibus.*

I.

MInor quantitas dicitur in posterum *metiri* majorem, quando minor aliquoties sumta exacte æquat majorem. Ex. gr. ponamus ulnam continere sex pedes, pes unus *metietur* ulnam, quia pes sexies sumtus exacte æquat ulnam.

2. Quantitas, quæ metitur majorem, appellatur *pars* majoris, & major dicitur *multiplex* minoris: sic pes est pars ulnæ, & ulna est multiplex pedis.

3. Si sumatur magnitudo unius passus, qui continet pedes duos & dimidium, & tentaverit quis metiri ulnam, id præstare non poterit, nam si sumatur passus tantum bis, resultabunt duntaxat quinque pedes, qui nondum æquant ulnam: & si idem passus ter sumatur, resultabunt pedes septem cum dimidio, qui ulnam excedent: sic igitur hæc quantitas duorum pedum cum dimidio non metitur ulnam, neque

proprie dicitur *pars* ulnæ : nihilominus dicere possumus illas esse *partes*, nam hæc quantitas continet quinque pedes dimidios: sed pes dimidius est pars ulnæ, nam si duodecies sumatur, eam metitur : sic igitur passus hic continet partes ulnæ, quia continet quinque pedes dimidios, qui sunt $\frac{5}{12}$ id est, quinque partes duodecimæ unius ulnæ.

4. Quando duæ quantitates ita comparatæ sunt, ut inveniri possit tertia quantitas, quæ sit pars utriusque, id est, quæ utramque metitur, tunc hæ duæ quantitates sunt *commensurabiles* : sic quantitas unius passus, & ulna sunt duæ quantitates commensurabiles, quia dari potest tertia quantitas, nimirum pes dimidius, qui metietur ulnam & passum: nam pes dimidius quinquies sumtus æquat passum, & idem pes dimidius sumtus duodecies æquat ulnam.

5. Si vero possibile non est, invenire tertiam quantitatem, quæ metiatur utramque, tunc hæ duæ quantitates sunt *incommensurabiles*.

6. Magnitudines commensurabiles sunt *ut numerus ad numerum*, id est, hæ magnitudines exprimi possunt per certos numeros, ita ut magnitudo se habet ad aliam magnitudinem, sic certus numerus se habeat

ad

ad alium certum numerum. Ex. gr. ſi linea eſt unius ulnæ vel ſex pedum, & alia linea unius paſſus f. duorum pedum cum dimidio, hæ duæ lineæ erunt ut numerus ad numerum; nam quia pes dimidius metitur utramque, alteram per quinque & alteram per duodecim, manifeſtum eſt, cum altera contineat quinque pedes dimidios, & altera duodecim, has duas lineas eſſe ut 5. ad 12. & per conſequens ut numerus ad numerum.

7. Si duæ magnitudines non ſunt ut numerus ad numerum, id eſt, ſi posſibile non eſt exprimere magnitudines per duos numeros, erunt incommenſurabiles: quod certum eſt per præcedentem.

8. Diſpiciendum igitur nunc eſt, an revera tales magnitudines dentur, quæ per numeros exprimi non poſſunt: nam ſi hoc eſt, neceſſum erit dicere, dari magnitudines incommenſurabiles.

9. *Numerus planus* eſt qui provenire poteſt ex multiplicatione duorum numerorum. Ex. gr. ſex eſt numerus planus, quia provenit ex multiplicatione 3. & 2. nam bis ter ſunt ſex. Similiter 15. eſt numerus planus, quia provenit ex multiplicatione 5. per 3. Similiter 9. eſt numerus planus, quia provenit ex 3. per 3.

10. Numeri, qui in ſe mutuo multiplicati, planum producunt, appellantur

*late-*

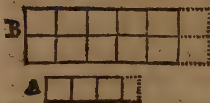
*latera* plani, ut 2. & 3. sunt latera plani 6. Similiter 3. & 5. sunt latera plani 15.

11. Si concipiantur unitates ut parva quadrata, ea in formam rectanguli collocari poterunt, si numerus illarum fuerit planus. Ex. gr. 12. quadrata collocantur in formam rectanguli, cujus alterum latus continet 6. & alterum 2. Similiter 48. constituet rectangulum, cujus alterum latus est 12. & alterum 4. Vid. fig. sequentes *B* & *C.*

12. *Numerus quadratus* est planum, cujus latera sunt æqualia, ut 4. resultans ex multiplicatione 2. per 2. ut 9. proveniens ex 3. per 3. ut 16. ex 4. per 4. &c.

13. Numerus quadratus collocari potest in formam quadrati; & numerus qui collocari potest in formam quadrati, est quadratus, & qui non potest hac ratione collocari, non est numerus quadratus.

14. Numeri *plani similes* sunt, qui collocari possunt in formam rectangulorum similium, id est, quorum latera sunt proportionalia ut 12. & 48. nam latera plani 12.




sunt 6. & 2. ceu videre in figura *B.* & latera plani 48. sunt 12. & 4. ceu videre est in



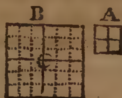

in figura *C.* fed 6. 2 :: 12. 4.

15. Omnes numeri quadrati funt plani fimiles. (6. 32.)

16. Omnis numerus collocari poteft in forma lineæ rectæ, & in hoc ftatu haberi poteft pro plano: hinc 3. in figura *A* erit planum fimile 12. nam latera plani 3. funt 3. & 1. quia femel ter faciunt ter, & latera plani 12. funt 6. & 2. fed 3. 1 :: 6. 2.

17. Dantur numeri, qui non funt plani fimiles, ut ab 1. usque ad 10. funt 1. 4. 9. qui cum quadrati fint, fimiles funt; poftea funt 2. 8. qui habent unum latus duplum alterius: reliqui non funt plani fimiles, ut 3. 5. 6. 7.

18. Si numerus quadratus multiplicet alium num. quadratum, producetur tertium quadratum ex.gr. *A*.4. & *B*.9. fint numeri quadrati & fe multiplicent, producantq; numerum C. nim. 36. Dico hunc numerum tertium effe quadratum: nam multiplicare *B* per *A* eft fumere *B* toties, quot funt unitates in *A*. Sed totum numerum *B*. 9. confiderare poffum, tanquam



quam quadratum unicum, illudque toties ſumere, quot ſunt unitates ſ. parva quadrata in *A*: & quemadmodum unitates in *A* ſunt poſitæ in formam quadrati; ſic etiam toties quadratum *B* ponere potero, tanquam tot unitates: hinc erunt 4. *B*. quæ conſtituent quadratum totum *C*. 36.

19. Si ſint duo numeri plani ſimiles, major dividi poteſt in tot quadrata, quot ſunt unitates in minori. *A*. 3. & *B*. 12. ſunt plana ſimilia: ita ut latus 3. ad latus 6. ſit ut latus 1. ad latus 2. Poſſum dividere planum *B*. 12. in tria quadrata ſimiliter locata ut tria parva quadrata plani *A*, & quodlibet majorum quadratorum in *B* reſpondebit 4. illorum in *A*. Similiter ſi plana ſunt 8. & 72. poſſum dividere 72. in 8. quadrata, quorum quodlibet continebit 9. illorum in minori plano 8. Idem etiam accidet, ſi vel unus vel ambo ſunt numeri fracti, ut ſi *A* continet 3. cum dimidio & *B* 14. poſſum dividere 14 in tria quadrata cum dimidio, eodem modo diſpoſita ut in *A*, ceu videre eſt in parvis quadratis punctatis, quæ figuris adjecta ſunt. Similiter ſi plana ſunt *B*.12.&*D*.27. poſſum dividere 27. non tantum in tria quadrata eodem modo diſpoſita ut illa in *A*, ſed



*A*, ſed etiam in 12. eodem modo poſita ut illa in *B*: quod videre eſt per lineas punctatas. Ad hoc præſtandum, tantum dividuntur latera majoris plani in tot partes, in quot ſunt diviſa latera homologa minoris plani. Figuræ ipſæ rem totam facilem reddent.




20. Numeri plani, qui ſic dividi poſſunt, ut tot ſint quadrata in majori plano, quot ſunt unitates in minori, ſunt ſimiles; hæc eſt converſa præcedentis.

21. Duo numeri ſimiles in ſe mutuo multiplicati producunt numerum quadratum. Nam diviſo majori plano in tot quadrata, quot ſunt unitates in altero plano (7.19.) Multiplicabitur planum per aliud, ſi majora quadrata majoris plani toties ſumantur, quot ſunt unitates vel parva quadrata in minori plano, id eſt, toties quot ſunt ipſa. Sed multiplicare numerum quadratum per eundem numerum, nihil aliud eſt quam conſtituere quadratum ex quadratis. Ex. gr. *A*. 3. & *B*. 27. cum ſint plana ſimilia, conſidero *B*. 27. ut planum compoſitum ex tribus majoribus quadratis, ut *A*. 3. eſt planum compoſitum

ex tribus unitatibus vel tribus, parvis quadratis. Si jam sumo hæc tria majora quadrata toties, quot sunt unitates in *A*, id est, ter; tunc produco ter tria quadrata majora *B*, i. e. 9. quadrata,

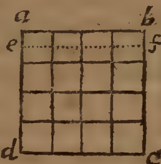



quorum quodlibet respondet 9. illorum, quæ sunt in *A*, & omnia 9. quadrata in *B* respondebunt 81. illorum in *A*; ita ut *A*. 3. multiplicatum in *B*. 27. producat 81. qui est numerus minorum quadratorum in formam quadratam dispositus, & per consequens (7. 13.) hic numerus 81. est quadratus. Similiter si plana sunt 12. & *D*. 27. divido 27. in 12. quadrata, quæ multiplico per 12. & resultant 144. majora quadrata posita in formam quadrati, quæ respondent 324. illorum in minori plano.

22. Si duo numeri plani sint similes, quacunque ratione unum disponatur, eadem ratione poterit disponi alterum. Sint 3. & 12. plana similia ut supra. Si disponantur 12. in lineam rectam ad constituendum rectangulum, cujus latus unum sit 12. & alterum 1. Dico etiam 3. posse disponi in rectangulum simile, cujus latus unum habebit 6. & alterum semissem unius &c.

23. Si

23. Si numerus dividat alium numerum quadratum, producet numerum tertium, qui erit planus similis divisori. Sit quadratum *a c* 16. & dividatur per quemcunque numerum ex.gr. per 8. Id quod fit, si sumatur octava pars lateris *a d*, nimirum *a e* & ducatur parallela *e f*; nam resultabit planum *a f*, quod erit octava pars quadrati *a c*. Sed



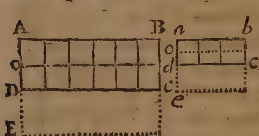

dividere numerum vel planum per 8. est sumere octavam partem hujus numeri sive plani. Dico *a f* esse planum simile ad 8. Nam cum 8. sit dispositus in lineam rectam ad constituendum rectangulum, cujus unum latus sit 8. & alterum 1. rectangulum *a f* ipsi erit simile, quia *a e* sumta est octava pars ab *a d* vel *a b*: Ergo ut 8. ad 1. (quæ sunt latera plani 8. divisoris) Sic *a b* ad *a e* (quæ sunt latera plani provenientis ex quadrato *a c* divisi per 8.) Ergo &c Q. E. D.

24. Si duo numeri plani se mutuo multiplicantes producant quadratum, sunt similes.

25. Duo numeri plani non similes se mutuo multiplicantes, non possunt producere numerum quadratum. Hæ propositiones sunt corollaria præcedentium.

26. Si

26. Si duo numeri sint plani similes, eorum æque multiplices quicunque & illorum partes æquales quæcunque, sunt etiam plani similes. Sint plani $a\,b\,c\,d$ 3. & $A\,B\,C\,D$ 12. similes, ita ut $a\,b.\ A\,B :: b\,c.\ B\,C.$ Dico si sumatur duplum unius &

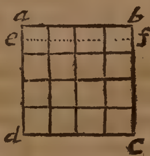



duplum alterius (vel quivis alius æque multiplex) hæc dupla erunt similia: Nam sumta $a\,e$ dupla $a\,d$, & $A\,E$ dupla $A\,D$, ad constituendum planum $b\,e$ duplum plani $b\,d$ & planum $BC$ duplum plani $B\,D$, manifestum est ut $a\,d.\ A\,D :: a\,e.\ A\,E.$ sed $a\,d.\ A\,D :: a\,b.\ A\,B.$ Ergo etiam $a\,e.\ A\,E :: a\,b.\ A\,B$; Et per consequens plana $b\,e$ & $B\,E$ sunt similia. Similiter se habebit si sumantur illorum semisses $b\,o$; $B\,O$ vel quævis aliæ partes æquales.

27. Si duo numeri sint plani non similes, eorum æque multiplices quicunque, & eorum partes æquales quæcunque etiam erunt non similes. Hoc sequitur ex præcedente.

28. Inter duos numeros planos similes quoscunque, incidit numerus medius proportionalis. Sint numeri plani similes 2. & 8. Dico possibile esse invenire tertium numerum qui medius proportionalis

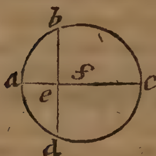
nalis erit: nam si concipiatur planum 8. in lineam rectam *A B* dispositum, & planum 2. etiam in lineam rectam *A D*, & ex his duabus lineis fiat planum *A C* 16. hoc planum *A C* 16. provenit ex multiplicatione duorum numerorum 2. & 8. (6.17.& seqq.) & per consequens numerus parvorum quadratorum totius plani *A C* 16. erit numerus quadratus, (7. 21.) & poterit disponi in figuram quadrati (7. 13.) Sit igitur dispositus in figuram quadratam *a c*; Sic quadratum *a c* erit æquale plano *A C*, quia est idem numerus aliter saltem dispositus. Ergo (6.59.) latus *a b* 4. erit medius proportionalis inter *A D* 2. & *A B* 8.



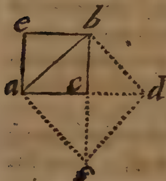

29. Inter duos numeros non similes non potest cadere numerus medius proportionalis. Sint numeri 4. & 6. in lineam rectam dispositi, & se mutuo multiplicantes producant planum 24. hoc planum 24. non est numerus quadratus; (7.25.) & per consequens non poterit disponi ut numerus quadratus. Ergo non poterit haberi numerus medius inter 4. & 6. Nam hic nu-

numerus qui nunc concipitur medius, multiplicatus per se ipsum, produceret numerum quadratum, aliunde æqualem plano ex 4. & 6. (6. 59.) quod est impossibile quia planum 24. ex 4. & 6. productum non est numerus quadratus.

30. Sint duæ lineæ *ae* & *ec*, ut numerus ad alium numerum non similem: ex. gr. ut 1. ad 2. Sit præterea *eb* media proportionalis, ita ut *ae*. *eb* :: *eb*. *ec*. Dico *eb* esse incommensurabilem duobus extremis *ae* & *ec*: nam cum *ae* & *ec* sint ut 1. & 2. id est, ut numeri non similes (per hypothesin) æque ac illorum æque multiplices quicunque, (7. 27.) nunquam erit possibile invenire numerum medium proportionalem inter *ae* & *ec*, (per præcedentem) & per consequens *eb* non erit ad *ae* vel *ec* ut numerus ad numerum: Ergo illa est incommensurabilis.




31. Diameter quadrati *ab* est incommensurabilis lateri *ac*. Nam sumta *ad* dupla *ac* & facto triangulo *abd*, quod erit simile *abc*, quia cum *cd* sit æqualis *cb*, angulus *cdb* est æqualis angulo *cbd*; (2. 15.) Sic



Sic angulus *c d b* est semissis recti æque ac *c a b*. Ergo *a b d* est rectus, &c. Sic *a c. a b* :: *a b. a d.* Ergo *a b* est media proportionalis inter *a c* 1 & *a d* 2. Et per consequens (per præcedentem) incommensurabilis.

32. *Potentia* lineæ appellatur quadratum quod constituitur super illa linea. Potentia lineæ *a c* est quadratum *a c b e*, & potentia lineæ *a b* est quadratum *a b d f*. Et linea *a b* dicitur *bis posse lineam a c*, qui mos loquendi à Græcis transumtus & in Geometriam receptus fuit.

33. Diameter *a b* est commensurabilis *potentiâ* lateri *a c*, id est, quadratum *a b d f* est commensurabile quadrato *a b c e*, cum unum sit duplum alterius.

34. Sed si sumatur *a o* media proportionalis inter *a b* & *a c*, hæc media *a o* erit incommensurabilis in potentia, id est, quadratum lineæ *a o* erit incommensurabile quadrato *a c*, vel quadrato *a b*: nam quadratum *a c* ad quadratum *a o* est in ratione duplicata *a c* ad *a o*, (6. 29.) id est, ut *a c* ad *a b*, (6. 30.) Sed *a c* est incommensurabile *a b*: (7. 31.) Ergo etiam quadratum *a c* etiam est incommensurabile quadrato *a o*.

a ———— o

35. *Secundâ potentia* lineæ est cubus, qui hanc lineam pro latere habet.

36. Si sumantur $an$ & $am$, duæ mediæ proportionales inter

a —— n
a —— —— m

$ac$ & $ab$, ita ut $ac . an :: am . ab$. erit linea $an$ incommensurabilis secunda potentia $ac$, id est, cubus $ac$ erit incommensurabilis cubo $an$, quia cubus $ac$ est ad cubum $an$ in ratione triplicata lateris $ac$ ad latus $an$, id est, ut $ac$ ad $ab$. Sed $ac$ & $ab$ sunt incommensurabiles &c. Sunt vero etiam $ac$ & $am$ commensurabiles secunda potentia, nam cubus $am$ est duplus cubi $ac$.

37. Quæ dicta sunt de numero plano facile applicari possunt numeris solidis. *Numeri solidi* appellantur illi, qui proveniunt ex multiplicatione numeri plani per quemcunque numerum: Ex. gr. 18. est numerus solidus ortus ex 6. (qui est numerus planus) multiplicato per 3. vel ex 9. multiplicato per 2.

38. Numeri *solidi similes* sunt illi, quorum parvi cubi ita disponi possunt, ut constituant parallelepipeda rectangula similia.

39. Numeri *cubici* sunt illi qui disponi possunt in formam cuborum, ut 8. vel 27. quorum *latera* sunt 2. & 3. *bases* vero 4. & 9.

40. Omnis numerus cubicus multiplicans alium numerum cubicum, producit tertium numerum cubicum.

41. In-

41. Inter duos numeros solidos similes, incidunt duo numeri medii proportionales. *Saltem applicari debent solidis, quæ jam demonstrata sunt in ordine ad plana.*

42. Hæ demonstrationes quibus probatur dari lineas & magnitudines incommensurabiles, probant etiam *continuum* non esse compositum ex punctis finitis: nam si diameter æque ac latus quadrati essent composita ex punctis finitis, punctum metiretur latus & diametrum: Nam punctum inveniretur certis aliquot vicibus in latere & certis quoque vicibus in diametro; quod est impossibile (per demonstrationes præcedentes.)

43. Quia in triangulo rectangulo quadratum lateris maximi est æquale duobus quadratis reliquorum laterum, (6 61.) Semper adhibitum fuit illud triangulum ad inveniendas incommensurabiles: nam si omnia tria latera sunt commensurabilia, poterunt omnia tria exprimi tribus numeris, & tunc quadratum maximi numeri erit æquale quadratis duorum reliquorum numerorum; ut si maximum latus est 5. pedum, minimum 3. mediocre 4; quadratum ex 5. erit 25. & reliqua quadrata erunt 9. & 16. & hæc duo simul sumta 9. & 16. constituunt tertium 25. Sed si latus minimum est 2. & mediocre 3. maximum latus non poterit exprimi per numeros, quia quadra-

 tum

tum minoris lateris 4. additum quadrato mediocris 9. facit 13. qui exprimit quadratum lateris maximi: Sed ut hic numerus 13. non est numerus quadratus, sic etiam non potest habere latus sive radicem per aliquem numerum expressam.

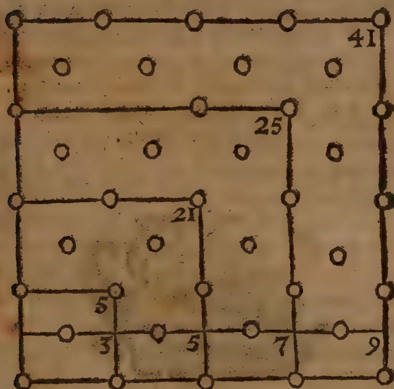
44. Omni tempore solliciti fuerunt in indaganda aliqua methodo ad inveniendos diversos numeros, qui exprimerent tria latera trianguli rectanguli, ut securi esse possimus, hæc tria latera esse commensurabilia. En methodum, qua inveniri possunt omnes numeri possibiles huic scopo convenientes.

45. Si sumantur duo numeri quicunque, (etiam ipsa unitas) quorum differentia saltem est unitas & conjungantur duo quadrata horum duorum numerum; resultabit numerus qui erit radix quadrati æqualis duobus quadratis? Et hic numerus exprimit latus maximum trianguli rectanguli, latus mediocre exprimetur numero unitate saltem minori; & latus minimum per duos primos numeros sibi invicem additos. Ex gr. sumtis 1. & 2. & quadrato utriusque 1. & 4. conjungo hæc duo quadrata 1. & 4 & produco 5. dico 5. poterit exprimere latus maximum, & mediocre, & 3. minimum: ita ut 25. quadratum maximi lateris sit æquale 16. & 9. quadratis reliquorum duorum laterum. Similiter si sumo

mo 2. & 3. eorumque quadrata 4. & 9. conjungo, produco 13. Dico 13. & 12. & 5. exprimere latera trianguli rectanguli, ita ut 169. quadratum de 13. æquale sit 144. & 25. quadratis ex 12. & 5. Similiter sumtis 3. & 4. eorumque quadratis 9. & 16. additis producuntur 25. Dico 25. esse maximum latus trianguli, 24. latus mediocre & 7. minimum.

*Hæc omnia facilius inveniuntur hac ratione.*

46. Si disponantur unitates decussa-




tim, omnes numeri constituentes figuram quadratam erunt numeri convenientes ad

exprimendum latus maximum. Latus minimum erit numerus comprehenſus in duobus prioribus ordinibus figuræ quadratæ, & latus mediocre erit unitate minus latere maximo.

47. Si hæc figura continuata fuerit, dabit omnes numeros poſſibiles: Sed notari debet æque multiplices trium numerorum inventorum idem præſtare; ut inventis 5. 4. & 3. eorum dupli 10. 8. & 6. exhibebunt tria latera trianguli, ita ut 100. quadratum ex 10. ſit æquale 64. & 36. quadratis ex 8. & 6. Similiter eorum tripli 15. 12. 9. idem faciunt: Quivis enim videt omnes hos numeros ſemper eandem ſervantes proportionem non niſi unum triangulum exprimere, nimirum illud quod exprimitur per 5. 4. & 3. & ſic omnes hi numeri debent haberi pro iiſdem.



LIBER



# LIBER OCTAVUS

## *De Progressionibus & Logarithmis.*

1.

PRogressio est series quantitatum, quæ inter se invicem similem aliquam habitudinem habent, & quælibet harum quantitatum appellatur *terminus*.

2. Quando termini se mutuo insequentes æqualiter crescunt vel decrescunt; Progressio appellatur *Arithmetica*, ut sunt numeri naturali serie procedentes 1. 2. 3. 4. 5. &c. vel etiam numeri impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. vel etiam ut 4. 8. 12. 16. vel etiam 20. 15. 10. 5. 0.

3. Progressio arithmetica potest augeri in infinitum sed non diminui.

4. Si in progressione arithmetica sumantur quatuor termini, quorum duo priores à se invicem tantum distant, quantum duo posteriores; Hi quatuor termini dicuntur proportionales in proportione arithmetica, ut in progressione numerorum natu-

naturalium 1. 2. 3. 4 6 6. 7. 8. 9. &c. Si sumamus 2. 3 ::: 9. 10. (hæc nota ::: inposterum indicabit proportionem arithmeticam) erit eadem proportio arithmetica inter 2. & 3. quæ est inter 9. & 10. id est, 10. excedere 9. tantum, quantum 3. excedit 2. Similiter 3. 5 ::: 8. 10. sunt in proportione arithmetica. Sicut etiam 1. 5 ::: 5. 8. ubi 5. bis repetitur & est medium arithmeticum inter 1. 9.

5. In proportione arithmetica aggregatum duorum extremorum est æquale aggregato duorum mediorum, ut in 2. 3 ::: 9. 10. aggregatum ex 2. & 10. est 12. & aggregatum ex 3. & 9. etiam est 12. Similiter in 3. 5 ::: 8. 10. aggregatum ex 3. 10. est 13. & aggregatum ex 5. & 8. quoque est 13. Ratio hujus ex se satis manifesta est, nam si 10. excedit 8. etiam id quod additur 8. nimirum 5. excedit tantum illud quod additur 10. nimirum 3. & sic oritur æqualitas.

6. Aggregatum sive summa primi & ultimi termini est æqualis summæ secundi & penultimi, vel tertii antepenultimi &c. ut in primo exemplo 1. & 9. faciunt 10. & similiter 2. & & 8. vel etiam 3. & 7. vel 4. & 6. semper sunt 10. & in medio restat 5. qui bis sumtus (tanquam respondens duobus, quia æqualiter distat à primo & ultimo) etiam efficit 10.

7. Si addatur primus terminus ultimo & multiplicetur illorum summa per semis-

fem

ſem numeri terminorum, productum erit æquale aggregato omnium terminorum ſimul ſumtorum, ut hic ſi 1. addatur 9. ut oriantur 10. & multiplicentur per 4. & $\frac{1}{2}$ (ſunt enim 9. termini) fient 45. qui ſunt ſumma omnium terminorum ab 1. usque ad 9. Hoc manifeſtum eſt per præcedentem.

8. Quando termini progreſſionis ſunt continuo proportionales; id eſt, ſi 1. eſt ad 2. ut idem eſt ad 3. & ut 4. ad 5. &c. Tunc progreſſio appellatur *Geometrica*, ut 1.2.4.8. 16.32. vel etiam 1. 3. 9. 27. 71. vel etiam 3. 12.48.192.768. vel 8.4.2.1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, &c.

9. Progresſio Geometrica poteſt augeri & diminui in infinitum.

10. Quando progreſſio incipit ab 1. ſecundus terminus appellatur *radix vel latus*: tertius appellatur *quadratum* vel ſecundus gradus: quartus, *cubus* vel tertius gradus: quintus *quadrati quadratum* vel quartus gradus, ſextus *ſurſolidus* vel quintus gradus, ſeptimus *quadrati cubus* &c.

11. Si ſumantur quatuor termini, quorum duo priores tantùm diſtant à ſe invicem in progreſſione, quantum duo poſteriores, erunt ſimpliciter proportionales, & productum extremorum erit æquale producto mediorum 6. 28.)

12. Sit Quantitas $A B$ divisa in $C$, in $D$, in $E$, in $F$ &c. ita ut $A B. A C :: A C. A D :: A D. A E$, &c. Dico $B C. C D. D E. E F.$ &c.




esse in progressione Geometrica continuè proportionales, & $A B. A C :: B C. C D :: C D. D E$ &c. nam quia $A B. A C :: A C. A D$ erit *dividendo* $A B$ minus $A C$. (id est, $C B$.) $A C :: A C$ minus $A D$. (id est, $D C$.) $A D$. & per consequens *alternando* $C B. D C :: A C. A D$ vel :: $A B. A C$. Sic de omnibus aliis probabitur :: $D C. E D. F E.$ &c.

13. Sit progressio quantitatum in linea recta $B C$, $C D$, $D E$, $E F$, &c. Et sit sumta $C d$ æqualis termino secundo $C D$, ut habeamus $d B$, differentiam primi & secundi termini, & fiat ut $B d$ ad $B C ::$ sic $B C$ ad aliquam quartam lineam, nimirum $B A$. Dico si numerus terminorum $B C$, $C D$, $D E$ &c. sit finitus, licet quam maximus sit, omnes hos terminos simul sumtos, etiamsi




illorum sint centum mille milliones, fore minores $B A$. Si quis supponeret esse hos terminos infinitos in multitudine; tunc

hi

hi termini simul sumti erunt præcise æquales $BA$: Nam quia per hypothesin $Bd$ (id est, $BC$ minus $Cd$ vel $CD$) est ad $BC$ :: ut $BC$ (i. e. $AB$ minus $AC$) est ad $AB$; Facile patebit ut $BC$. $CD$ :: $AB$. $AC$ :: $AC$. $AD$ &c. & per consequens omnes termini $CD$. $DE$. $EF$ &c. erunt adhuc intra punctum $A$, ad quod eò magis appropinquabitur quo magis augebitur numerus terminorum; Et sic quidem videmus omnes hos terminos, (qui in schola appellantur *partes proportionales*) si actu infiniti essent, non facere longitudinem infinitam, quoniam sunt inclusi in $BA$.

14. Hæc demonstratio facilior redditur in exemplo progressionis particularis, cujus termini sunt in ratione dupla, ex. gr. $BC$. dupla $CD$. & $CD$. dupla $DE$. &c. nam si numerus terminorum est finitus, etiamsi illorum essent centum milliones, & sumatur terminus ultimus & minimus, ex. gr. $FE$, eique adjungatur alia quantitas ipsi æqualis, scil. $FA$; manifestum est $EA$ esse æquale penultimo termino $ED$: nam penultimus $ED$ est duplus ultimi $FE$, per hypothesin. Sed $EA$ etiam est duplus $FE$, quia ponimus $FA$ æquale $E$. $F$. Similiter $AE$ cum $DE$, id est, $AD$, erit æquale sequenti termino $CD$: & tandem $AC$ erit æquale $BC$. Ita ut exinde videre liceat primum & maximum terminum semper æ-

qualem esse omnibus reliquis simul sumtis, modo addatur quantitas æqualis ultimo & minimo termino: Verum si nihil addatur, primus semper erit major omnibus reliquis simul sumtis. Si quis supponat hos terminos esse actu infinitos, tunc maximus *B C* erit præcise æqualis omnibus reliquis infinitis simul sumtis, *CD*, *D E*, *E F* &c.

A F E D C d B

nam quivis facile videt quo plures adjiciuntur termini eo magis appropinquari versus *A*, dum semper medietas quæ restat diminuitur. Sed quando continuo quantitas diminuitur medietate, & residuum iterum medietate & sic porro, manifestum est, si supponatur actu infinities medietate fuisse diminutam, nihil tandem restare. Hoc etiam demonstrari potest per deductionem ad impossibile monstrando omnes hos terminos infinitos simul sumtos, neque esse majores neque minores *B A*.

15. Exinde resolvi possunt difficultates quæ in scholis moventur contra divisibilitatem continui, & a Geometriæ ignaris pro insolubilibus habentur, cum tamen in rei veritate nihil sint quam meri paralogismi.

16. Si ponantur duæ progressiones, altera Geometrica incipiendo *a b* 1. & altera Arithmetica incipiendo *a b* 0. ita ut termini

mini unius respondeant e regione terminis alterius, tunc termini Arithmeticæ appellantur *Logarithmi*, & *exponentes*, ut

O. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256.

17. Quod in progressione Geometrica, peragitur per multiplicationem & divisionem, id in Logarithmis absolvitur per additionem & subtractionem: ut si essent tres numeri 2. & 8 :: 64. & desideraretur quartus numerus proportionalis in progressione Geometrica, necessum erit multiplicare 8. per 64. (utpote qui sunt duo termini medii) nam productum 512. erit æquale (6.28.) producto ex 2. & alio quarto numero, tanquam extremis quatuor proportionalium: ad inveniendum vero quartum hunc numerum, duntaxat necesse est dividere 512. per 2. & prodibunt 256. eritque tota ratio 2. 8 :: 64. 256. ita ut 64. & 256. tantum a se invicem distent in ordine progressionis, quantum 2. & 8. (8. 11.) sed si loco numerorum Geometricorum 2. 8 :: 64. sumti fuerint Logarithmi ipsis respondentes, nimirum 1. 3 :: 6. & quis vellet quærere Logarithmum quartum, debuisset addere 3. & 6. ut prodeant 9. & subtrahere 1. de 9. ut prodeant 8. qui esset Logarithmus numero Geometrico 256. respondens.

18. Similiter si sumantur duo numeri Geometrici 4. & 8. quibus respondent Lo-

 garith-

rithmi 2. & 3. multiplicatis 4. per 8. prodibunt 32. qui respondent Logarithmo 5. qui ex additione 2. & 3. oritur.

19. Similiter si sumantur 16. & multiplicentur per seipsos, resultabunt 256. qui respondebunt Logarithmo 8. qui exinde oritur si 4. sibi ipsi addatur.

20. Si quis desideraret numerum Geometricum Logarithmo 16. respondentem deberet sumere 256. qui respondet 8. & illos in se multiplicare, & prodibunt 65536.

21. Si quis etiam desideraret numerum Geometricum, qui responderet Logarithmo 23. debet sumere duos Logarithmos, qui simul sumti constituant 23. ut 7. & 16. & inter se multiplicare numeros Geometricos ipsis respondentes, nimirum 128. (sub 7.) per 65536. (qui essent sub 16.) & productum erit 8388608. quod responderet 23. Logarithmo, id est, quod vigesimum quartum locum, post numerum primum 1. habere debet.

22. Exinde videre est qua ratione facile quis respondere possit quæstioni quæ ordinariè proponitur, quanti veniret equus, si hac conditione emeretur, ut pro primo clavo solvatur, teruncius & pro secundo clavo duo teruncii, pro tertio quatuor, pro quarto octo, & sic usque ad vigesimum quartum: Nam vigesimus quartus constabit

ftabit 8388608 terunciis, id eft, 69905 libris 8. terunciis, & duplicata hac fumma (juxta 8. 14.) prodibit totum equum conftare 139810. libris.

23. Si quis haberet in magnis tabulis alicujus libri duas progresfiones longas jam abfolutas, ubi Geometrica Arithmeticæ refponderet; poffet quis in numeris Geometricis inveniendis calculandi labore fuperfedere: nam fi quis daret hos tres numeros 32. 64. 128. & defideraret quartum Geometricum; loco multiplicationis 64. per 128. & divifionis producti per 32. (quod in magnis numeris maxime moleftum eft) faltim fumantur Logarithmi trium numerorum datorum, nimirum 5. 6. 7. addantur 6. & 7. & à producto 13. fubtrahantur 5. reftabuntque 8. Logarithmus quarti numeri Geometrici: confule dein tabulam & refpondebit Logarithmo 8. numerus Geometricus 256.

24. Sed quoniam in tali progresfione Geometrica omnes numeri non occurrunt, hoc invenerunt medium conftituerunteque duas progresfiones, quarum altera, quæ continet omnes numeros 1. 2. 3. 4. 5. &c. & videtur effe progresfio Arithmetica, nihilominus proprietates habet Geometricæ; & altera quæ continet numeros apparenter maximè irregulares, nihilominus eft progresfio arithmetica. Ecce lineam quæ perfectè continet omnia hæc myfteria.

25. Sit

25. Sit linea recta *A E* divisa in partes æquales *A B*, *B C*, *C D*, *D E*, &c. Per puncta *A*, *B*, *C*, &c. concipiantur lineæ rectæ *A a*, *B b*, *C c* parallelæ inter se, sintque in progressione Geometrica: Exempli gratia, si *A a* fuerit 1. *B b* 10. sit *C c* 100. *D d* 1000. *E e*, 10000. &c. habebimus duas linearum progressiones, alteram Arithmeticam, alteram Geometricam: Nam lineæ *A B*, *A C*, *A D*,

*AD*, *AE* erunt in progreſſione Arithmetica, ut 1. 2. 3. 4. & ſic repræſentabunt Logarithmos, quibus reſpondebunt lineæ Geometricæ *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c.

26. Quælibet partium *ED*, *DC* &c. ſit æqualiter diviſa in *F*, *G*, *H* &c. & ſint ductæ parallelæ *Ff*, *Gg* & mediæ proportionales inter collaterales, id eſt, *Ee*. *Ff* :: *Ff*. *Dd* :: *Dd*. *Gg*. &c. denuo ſint aliæ mediæ proportionales ductæ per medium cujusvis partis *EF*, *FD*, *DG* &c. & ſic conſequenter, usque dum lineæ parallelæ ſibi invicem maximè vicinæ fiant, & tandem concipiatur linea curva, quæ tranſeat per extremitates omnium harum parallelarum *e*, *f*, *d*, *g* &c. Hac ratione habebis lineam, cujus proprietates ſunt notatu digniſſimæ, & uſus maximi, prout ſuo loco patebit.

27. Si hæc figura accurata cum diligentia in tabula quadam magna deſcriberetur, tunc poſſet quælibet pars *AB*, *BC*, *CD*, &c. non tantum in 100. vel 1,000, ſed in 10,000. vel 100,000. vel plures dividi. Ita ut ſi *AB* fuerit 100,000. *AC* eſſet 2000,000. & *AD* 300.000, &c. ſecundum progreſſionem Arithmeticam.

28. Suppoſitâ linea *Ee* 10,000. partium, concipimus per quamvis partem lineas parallelas cum *AE*, quæ curvam in totidem punctis ſecent. Exempli gratia, ſit

ſit linea parallela 10. ducta per partem 9, 900. totius *Ee*, quæ ſecet curvam n *o*. Sit etiam alia parallela *o O*, ſecans

lineam *A E* in puncto *O* in parte 399, 563. exinde quis poterit cognoſcere 399, 563. eſſe Logarithmum numeri 9, 900. Similiter ſi *S u* tranſiret per partem 9, 000 lineæ *E e*, & *u V* ſecaret lineam *A E* in 395, 424.

424, tunc esset hic numerus Logarithmus numeri 9, 000. &c.

29 Hac ratione posset quis conficere tabulam Logarithmorum ab 1. usque ad 10, 000, & ulterius, si quis voluerit producere lineam *AE.*

30. Nota, ut habeas omnes Logarithmos ab 1. usque ad 10, 000, sufficit quærere Logarithmos post 1, 000. usque ad 10, 000. id est, (ducta linea parallela *dt*) sumendo Logarithmos omnium partium post *t* usque ad *e*, quarum Logarithmi continentur inter *E* & *D*: nam per hoc habebis Logarithmos omnium aliarum partium, quæ sunt post *t* ad *E*, & quarum Logarithmi sunt inter *D* & *A*. Exempli gratia, cum *O o* sit 9, 900. partium & ejus Logarithmus 399, 563, idem numerus assumi poterit pro Logarithmo numeri *n N* 990. & numeri *y Y* 99. mutando duntaxat cifram primam 3. quia secundum compositionem hujus lineæ *O, N.* vel *N Y,* æquales esse debent *E D* vel *D C*, quod quivis facile demonstrabit. Sic *O N*, vel *N Y* continebunt 100, 000. & quia *A O* est 399, 563. ablatis *O N* 100, 000, restabunt 299,563. pro *A Y*, à quibus si iterum auferantur 100, 000. restabunt 199, 563 pro *A Y*; & eadem ratione cum *A V* habeat 395,424. pro logarithmo numeri *V u* 9, 000. etiam

etiam habebis 095, 424. pro logarithmo $X \times 9$. vel 195, 424. pro logarithmo numeri 90. vel 295, 424. pro logarithmo numeri 900.

31. Vt hæc omnia etiam ad praxin deducantur per calculum, non necesse est ullam talium figurarum delineationem instituere, sed saltim delineatas concipere: nam ope arithmeticæ possum invenire numerum medium proportionalem *F f* inter duos *O d* & *E e*, & postea etiam medios inter *D d* & *F f*, vel inter *F f* & *E e* &c. Sed ea quæ explicavimus sufficiunt, ut habeamus cognitionem, quantum quidem nobis necesse est, naturæ & artificii logarithmorum: nam opus non est, ut ipsi calculi laborem subeamus, & tabulam logarithmorum condamus, quia jam peractus est hic labor. Deus enim, boni publici causâ, homines quosdam excitavit, quibus magnam largitus fuit patientiam, ut superare potuerint molestias laborum, qui videri poterant intolerabiles. Scimus quippe ultra viginti viros, stipendio ad id conductos per viginti annos & quod excedit in calculando assiduitate plane improba desudasse.

32. Præter has duas progressiones datur & tertia, quæ appellatur *Harmonica*, quando sumtis tribus terminis, qui

se

se immediatè consequantur, observare licet, quod maximus ad minimum sit ut differentia inter maximum & medium, ad differentiam inter medium & minimum, ut 30. 20. 15. 5. &c. sunt in progressione harmonica; nam sumtis 30. 20. 15. differentia inter 30. & 20. est 10. & differentia inter 20. & 15. est 5. sed 10. 5 :: 30. 15.

33. Hæc progressio potest diminui in infinitum, sed non augeri.

*Ea quæ jam dicta sunt de hac progressione magnum usum non præstant, neque etiam plane extraordinariis proferendis nunc incumbo.*

*In continuatione hujus Geometriæ observabuntur quædam proprietates hujus progressionis notatu dignissimæ, quæ aliquam lucem adferre poterunt illis, quæ habemus de musica veterum, cujus obscuritas nondum detecta est. Ibi demonstrabitur respectus seu habitudo, quam hyperbole habet ad hanc progressionem; nam quemadmodum angulus rectilineus inservit inveniendis inter duas datas tot mediis, quot quis voluerit habere in ratione arithmetica; & ut linea illa curva, quam descripsimus in usum logarithmorum, etiam inservit inveniendis inter duas datas tot mediis, quot quis desideraverit in ratione Geometrica; Sic notare licebit hyperbolen inser-*

*ferbire inbeniendis inter duas datas tot mediis, quot quis boluerit in ratione harmonica.*

34. Datur quoque progresſio quadratorum, & cuborum, quadrati quadratorum, ſurſolidorum, quadrati cuborum &c. ut 1. 4. 9. 16. 25. 36. &c. quia omnes ſunt numeri quadrati, quorum radices ſunt numeri naturales 1. 2. 4. 4. 5. 6. &c. Similiter 1. 8. 27. 64. 125. 216. ſunt cubi eorundem numerorum. Similiter 1. 16. 81. 256. 625. 1296. ſunt quadrati quadrata eorundem numerorum.

35. In progresſione quadratorum poſita o pro primo termino, ſic o 1. 4. 9. 16. &c. ſumma omnium terminorum eſt major tertia parte ultimi termini multiplicati per numerum terminorum; & hic exceſſus qui eſt ultra tertiam, ſemper tanto minor eſt, quo major eſt numerus terminorum. Similiter in progresſione cuborum, hæc ſumma terminorum major eſt quarta parte; & in quadrati quadratis, illa eſt major quinta parte, & ſic conſequenter in reliquis. Hoc ut probemus, ſufficit ſaltim facere inductionem, prout videre eſt in hac tabula, ubi ſecunda columna continet progresſionem quadratorum poſt o. Tertia columna complectitur ſummas terminorum. Exempli gratia, ibi videre licet ſummam poſt o. usque

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | 1 | 1 | 2 | $\frac{1}{1}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ |
| 3 | 4 | 5 | 12 | $\frac{5}{12}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ |
| 4 | 9 | 14 | 36 | $\frac{7}{18}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$ |
| 5 | 16 | 30 | 80 | $\frac{9}{24}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$ |
| 6 | 25 | 55 | 150 | $\frac{11}{30}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{30}$ |
| 7 | 36 | 91 | 252 | $\frac{13}{36}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{36}$ |

que ad 9. esse 14. Quarta columna continet productum cujusque termini multiplicati per numerum terminorum qui sunt post 0. usque ad ipsum; numerus ille notatus est in prima columna, ut 36. est productum ex 9. multiplicatis per 4. Quinta columna comprehendit fractiones, quæ exhibent proportionem numerorum tertiæ

tiæ & quartæ columnæ, ut è regione 14. & 36. ponitur $\frac{7}{18}$, qua fractione hoc volumus 14. esse ad 36. ut 7. est ad 18. & sic etiam esse summum terminorum 14. ad productum ex 9. multiplicatis per 4. nim. ad 36. ut 7. ad 18. Vlterius, in eadem co-

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | 1 | 1 | 2 | $\frac{1}{1}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ |
| 3 | 4 | 5 | 12 | $\frac{5}{12}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ |
| 4 | 9 | 14 | 36 | $\frac{7}{18}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$ |
| 5 | 16 | 30 | 80 | $\frac{9}{24}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$ |
| 6 | 25 | 55 | 150 | $\frac{11}{30}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{30}$ |
| 7 | 36 | 91 | 252 | $\frac{13}{36}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{36}$ |

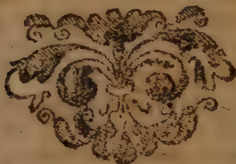
lumna

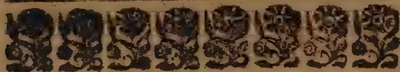
lumna quinta, post $\frac{7}{18}$ observantur & hi characteres (vel $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{18}$;) quibus hoc volumus, $\frac{18}{7}$ tantum valere, quantum una tertia una cum una decima octava parte, quia revera $\frac{7}{18}$ tantum valent quantum $\frac{6}{18}$ una cum $\frac{1}{18}$ id est, $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{18}$ ita ut summa 14. sit tertia pars ex producto 36. & præter illam adhuc una decima octava pars ex 36. Similiter, reperio 30. tanquam summam terminorum usque ad 16. esse majorem tertia parte ex 80 tanquam producto ex 16. per 5. & excessum esse $\frac{1}{24}$: Nam $\frac{30}{80}$ tantum valent quantum $\frac{3}{8}$, vel quantum $\frac{9}{24}$ vel quantum $\frac{8}{24} \dagger \frac{1}{24}$ vel tandem quantum $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{24}$ Sed $\frac{1}{24}$ tantum non est quantum $\frac{1}{18}$; sic igitur in continuatione hujus tabulæ observare licet, hos excessus, qui sunt ultra tertiam partem, semper diminui, prout numerus terminorum crescit: nam hi excessus sunt $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{1}{42}$ $\frac{1}{48}$ &c. dum denominator fractionis interea semper augetur numero senario.

 36. Si

34. Si quis constitueret similem tabulam cuborum, tunc videre erit fractiones, quæ erunt ultra partem quartam, semper valore diminui, dum interea illarum denominator augetur quaternario, quoties novus terminus in progressione additus fuerit; & similiter in reliquis progressionibus per similes tabulas id observare dabitur, quod generaliter in propositione præcedente dictum fuit.

*Omnia hæc erunt maxime utilia in continuatione hujus Geometriæ, ubi etiam plures aliæ progressiones occurrent.*





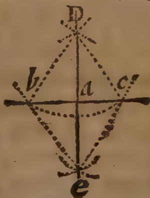
# LIBER ULTIMUS.

## *Problemata vel Geometria Practica.*

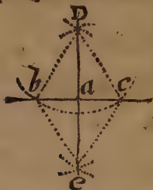
I.

P*Roblema* appellatur in Geometria propositio, quæ docet aliquid constituere ac praxin demonstrat, contra ac *Theoremata*, quæ sunt propositiones speculativæ, in quibus considerantur passiones seu proprietates rerum jam factarum.

2. *Ex puncto dato* a *quod est in linea* b a c *perpendicularem erigere.* Abscinde circino utrinque partes æquales *a c* & *a b*: parum refert sive hæ partes magnæ sint seu parvæ, modo fuerint æquales. Aperi paulo plus crura circini & ex punctis *b* & *c*, tanquam centris, duos describe arcus similes, se mutuo in puncto *d* intersecantes. Postea adplicata regula ad puncta *a* & *d*, duc lineam *a d*, quæ erit perpendicularis desiderata (2. 16.)

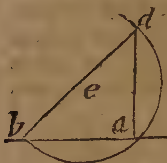


*3. Ex puncto dato d ducere perpendicularem versus lineam* b




a c. Ex centro *d* describe arcum circuli, qui secet lineam in duobus locis *b* & *c*: dein ex hisce duobus punctis *b* & *c* eadem circini apertura, describe duos parvos arcus, se mutuo intersecantes in *e*, & erit linea *de* perpendicularis quæsita. (2. 16.)

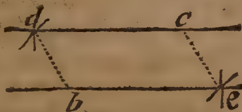
4 Quando puncta data *a* vel *d* sunt ad extremitates chartæ vel superficiei, in qua figura constitui debet, & non assumi potest distantia debita ultra punctum *a*, secundum praxes præcedentes; tunc hac ratione processus erit instituendus. Si punctum *a* datum est in linea, assume extra lineam punctum, ubi libuerit versus *e*, & ex eo tanquam centro describe circulum, qui transeat per *a* & secet lineam in *b*: Dein ex *b* duc lineam *be*, quæ si continuata fuerit, secabit circulum in *d*; recta *da* ducta erit perpendicularis ad *ba*. (4. 14.) Si verò punctum *d* datum est extra lineam, duc lineam pro lubitu *db*, & ex medio hujus lineæ describe




cir-

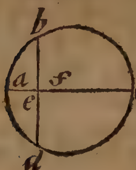
circulum *b a d*, qui fecet *b a* in *a*; linea *d a* erit perpendicularis defiderata. (4.14.)

5. *Ad datum punctum, data recte lineæ, parallelam ducere.* Sic linea data *a b*, & punctum datum *c*, per quod ducenda fit parallela: ex puncto *c* tanquam centro defcribe arcum circuli, qui fecet lineam datam in *a*: dein in eadem linea data accipe punctum *b* pro lubitu, quod tamen, quantum fieri poteft, remotum fit à puncto *a*, & ex hoc puncto *b* eadem circini apertura fac alium arcum circuli *d*: Accipe circino diftantiam *a b*, & hac ipfa apertura, ex puncto *c* tanquam centro, defcribe arcum qui fecet alium in *d*; applicata regula ad duo puncta *c* & *d* habebis lineam *c d* parallelam lineæ *a b*; nam quadrilaterum *c a b d*, habet latera oppofita æqualia per ipfam conftructionem; & per confequens eft parallelogrammum, per converfam nonæ propofitionis libri tertii.



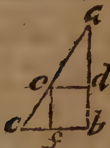

6. *Inter duas lineas datas* a c *&* e c *invenire mediam proportionalem* Difpofitis lineis datis *a e* & *e c* in lineam

rectam, ut constituant lineam totam *a c*, quære in ea medium *f* & ex hoc puncto *f* describe circulum *a b e*; erige perpendicularem *e b*, quæ secet circumferentiam circuli in puncto *b*, erit linea *a b* media proportionalis, ita ut *a e. e b* :: *e b. e c.* (6. 66)



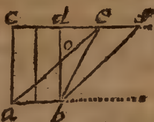

7. *Constituere quadratum æquale rectangulo dato.* Accipe mediam proportionalem inter duo latera rectanguli, & quadratum super hac media constitutum erit quæsitum (6 59.)

8. *Datis tribus lineis, invenire quartam proportionalem.* Sint lineæ datæ *a d*, *d e*, *a b*; constitutis *a d* & *a b* in unam rectam, & *d e* transversim posita, ut emergat triangulum *a d e*, produc latus *a e* versus *c*, & ex puncto *b* duc parallelam *b c*, dico lineam *b c* esse quartam proportionalem desideratam, & ut *a d*, *d e*. :: *a b*, *b c*. (6. 43.)

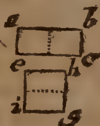



9. *Triangulo dato* a e b *æquale parallelogrammum rectangulum constituere.* Per summitatem *e* duc *e c* parallelam basi *a b*, erit rectangulum *a b d c*

*a b d c* duplum trianguli *a e b*: (3. 18.) divisa vero basi *a b* in duas partes æquales, & erecta perpendiculari, orietur rectangulum æquale triangulo.



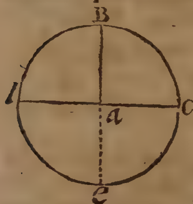

10. *Dato rectangulo, constituere aliud rectangulum æquale, quod habeat longitudinem datam.* Sit rectangulum datum *a b c*, cui constituendum sit aliud æquale, quod pro latere habeat longitudinem *e i*. Hic habemus tres lineas datas, nimirum *a b*, *b c* (quæ sunt latera rectanguli dati) & *e i*, quæ esse debet latus alterius rectanguli constituendi. Nunc igitur inquirenda est quarta linea, quæ sit alterum latus hujus rectanguli. Datis his tribus lineis, quære ex illis quartam proportionalem (9. 8.) quæ sit *e h*, ita ut *e i*. *a b* :: *b c*. *e h*: dico rectangulum *i e h* fore desideratum æquale rectangulo *a b c*. (6. 27.)




11. *Quodcunque polygonum in quadratum effingere.* Resolve polygonum in triangula (3. 22. vel 24.) & constitue tot rectangula æqualia his triangulis,

lis, 99.) ita ut omnia hæc rectangula habeant eandem longitudinem: (5. 10.) conjunge omnia hæc rectangula, ut unum ex illis resultet, & fac quadratum (9. 7.) æquale huic rectangulo, & habebis quod quæris.

*12. Dividere circulum in quatuor, in sex, & omnes arcus in duas partes æquales.* Vt dividatur in quatuor partes, necessum est ducere duas perpendiculares per centrum, ut *d a c* & *B a e*.




Si eum vis dividere in octo partes, divide quemvis arcum *B c*, *e* &c. in duas partes; quod fit, si ex punctis *B* & *c* duos arcus eadem circini apertura descripseris: nam ducta linea ex puncto intersectionis ad centrum *a*, dividet arcum *B* & *c* in duas partes æquales: eodem modo procedes cum reliquis arcubus. Vt dividere possis circulum in sex partes, accipe circino semidiametrum: nam ea nim. semidiameter sexies circumferentiæ applicata, hanc perfecte metietur: sic consequenter dividi potest circulus in partes 12. & 24. & 48. &c.

13. Di-

13. *Dividere circulum in quinque, in quindecim & alias partes æquales.* Hoc fieri poteſt geometrice hac methodo, quam demonſtro in Algebra. Conſtitue triangulum rectangulum, cujus alterum crus ſit ſemidiameter circuli, & alterum ſemiſſis ſemidiametri. Ab hypothenuſa hujus trianguli aufer dimidium ſemidiametri, reſiduum erit chorda $36^{\circ}$. & latus Decagoni. Duplicato hoc arcu, prodibit arcus $72^{\circ}$, qui eſt quinta pars circuli; & chorda horum $72^{\circ}$. erit hypotenuſa trianguli rectanguli, cujus alterum crus eſt ſemidiameter, & alterum decagoni latus. Sed quemadmodum per præcedentem docuimus invenire $60^{\circ}$. Sic etiam habebimus differentiam inter $36^{\circ}$. & $60^{\circ}$, nimirum $24^{\circ}$, quæ eſt decima quinta pars circuli. Sed in praxi breviſſima & certiſſima via eſt, circino iteratis vicibus aperturam quærere, quæ, ſi quinquies adplicata fuerit circumferentiæ, eam exacte metiatur: poſtea quælibet harum partium eodem modo dividatur in tres, quærendo per circinum & repetendo, ſi prima vice rem non tetigeris: & habebis

F 5 cir-

circulum in quindecim partes divisum. Si quælibet harum 15. partium etiam dividatur in quatuor, & quælibet harum quator in sex, erit totus circulus in 360. gradus divisus. Et hæc divisio maximè commoda est ad praxin. Nota, quod nondum inventa sit methodus dividere geometrice arcum, in tres partes æquales, neque in quinque, neque in septem, neque in alias partes impares. Dico geometrice, nihil præter lineam rectam & circulum adhibendo.

*Divisio hac circuli in 360. gradus etiam maximè utilis est, si quis sciverit usum circini seu instrumenti proportionum: est hoc genus aliquod circini, quod habet brachia a B, a C, in quibus notata sunt diversæ lineæ & diversæ divisiones, quarum illæ, quæ maximum usum præstant, reducuntur ad duas: nam in uno latere circini est quædam linea in quovis brachio a e B, & a e C, quæ inservit divisioni totius circuli in 360. gr. una opera absolvenda, & ut pro lubitu gradus quoscunque sumere possim. Divisio circini absolvitur modo sequente......*

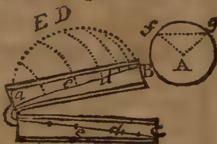



*14. Instrumentum proportionum signare seu preparare, ut in inserviat divi-*

*divisioni circuli.* Concipe semicirculum *a E D B*, qui exacte divisus sit in 180°. si ex puncto *a* per singulos gradus ducerentur arcus, qui secarent lineam *a e B*; exempli gratia, si ex 60°. *E* duceretur arcus *E e*, & ex 90° *D* arcus *D d* &c. notari deberet 60. in brachio instrumenti è regione *e*, & 90, è regione *d* &c. Si in altero brachio *e C* pariter processeris, habebis hoc latus instrumenti divisum, prout necessum est.

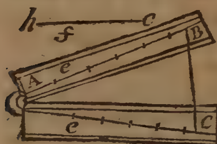
15. *Explicare usum instrumenti proportionum, quatenus inservit divisioni circuli.* Sit datus circulus *A f*, accipe circino communi semidiametrum *A f*, dein adplicato altero pede hujus circini communis ad punctum *e*, id est, gradum 60. in uno brachio circini seu instrumenti proportionum, tamdiu remove aut admove alterum brachium, usque dum pes alter communis circini præcisè incidat in punctum *e* alterius brachii Instrumenti proportionum, ita ut distantia *e e* æqualis sit semidiametro *A f*; Jam si statim invenire volueris 90°. circuli dati, impone saltim duos pedes circini in duo puncta *d*, *d*, & transfer hanc distantiam in *f g*, & habebis arcum *f g* 90, graduum. Sic si vo-

lueris sumere 35, gradus, saltim impone pedes circini communis in puncta lineæ *a B*, *a C*, in quibus est 35. gradus, & transfer hanc distantiam in circulum datum, & hac ratione procedere debes cum quovis



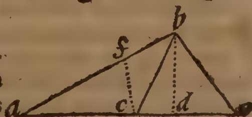

alio gradu. Omnia hæc fundantur in propositionibus 42.43.49.50 libri sexti: nam quemadmodum omnes circuli sunt figuræ similes, (6.50.) chorda *A D* ad semidiametrum *A F* ut chorda *A D* ad semidiametrum *e d*, id est, ut *a d* ad *a e*. Aliunde verò triangula *a d d* & *a e e* sunt similia, & sic *d d*. *e e* :: *a d*. *a e*. Sed *d d* per constructionem æqualis est *f g* & *e e* lineæ *A f*: ergo *f g*. *A f* :: *a d*, *a e*.

***16. Signare s. præparare instrumentum proportionum, ut inservire posſit diviſioni linearum rectarum.*** Ex centro circini ſint in brachiis ductæ duæ lineæ versus *B* & *C*, quarum quælibet divisa ſit in 100. vel 200 partes æquales, & sic inservient ad dividendam una opera lineam da-



datam, in quotcunque partes volueris. Exempli gratia, sit linea data *b c* & ab ea debeant sumi $\frac{25}{97}$ id est 25 nonagesimæ septimæ partes; Hoc in passu dividi deberet tota linea *b c* in 97 partes æquales, ut ex iis sumi possent 25. quod prolixum esset; sed ope circini proportionum id facile absolvitur. Accipe circino communi longitudinem lineæ *b c*, & applicato uno pede nonagesimæ septimæ parti *B* unius brachii instrumenti proportionum, admove vel remove alterum brachium tamdiu, usque dum pes alter præcise incidat in 97 partem *C* alterius brachii; dein transfer distantiam *e e* in *b f*, & *b f* erit exacte $\frac{25}{97}$ totius lineæ *b c*: id quod etiam fundatur in eo, quod triangula *A B C* & *A e c* sunt similia.

## 17. *Super datam lineam constituere angulum tot graduum, quot desideraveris.*

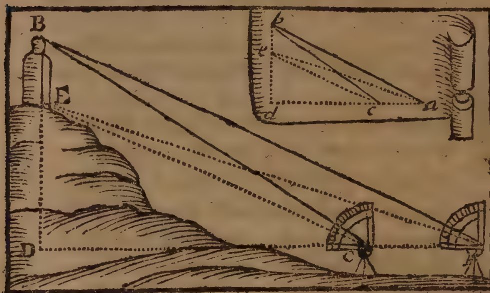



Sit linea data *ac*, super qua constituendus detur angulus 30. graduum. Ex puncto *a*, tanquam centro, describe circulum *e f*, in quo sumes per circinum proportionum, vel aliter 30. gradus à *e* usque ad *f*, & per

 hunc

hunc 30. gradum ducatur linea *a f*, quæ cum linea *a c* constituet angulum 30. graduum.

18. *Cognitis angulis dati trianguli & uno latere, invenire reliqua latera.* Si tibi dicatur, esse alicubi triangulum, cujus basis *A C* sit decem ulnarum



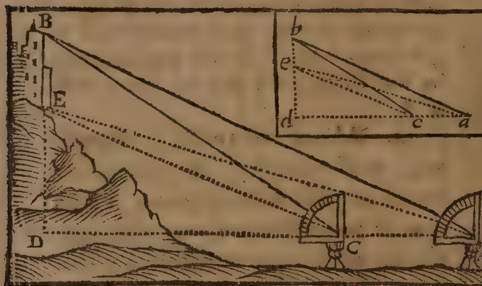

& anguli ad basin, ut *A C B* habeat 150. gr. & angulus *C A B* 20. gr. ( & per consequens tertius angulus ad verticem erit 10. quia omnes tres anguli 150. 20. 10. simul sumti efficiunt 180. id est, duos rectos ) & à te quæreretur, quot ulnas habere debeat quodvis reliquorum duorum laterum *A B*, *C B*. Fac in charta vel potius in tenui chartaceo triangulum simile *a c b* sequentem in modum: Accipe basin pro lubitu *a c* 10. pollices longam, vel quascunque alias decem

cem partes: super *c a* describe duos angulos, alterum *c a b* 20. grad. & alterum *a c b* 150. grad. (9. 27.) & duæ lineæ *a b*, *c b* se mutuo interſecabunt in aliquo loco, nimirum in *b*. Metire igitur quot pollices ſint in *a b* vel in *c b*: nam certus eſſe potes, tot eſſe ulnas in *A B*, quot pollices fuerunt inventi in *a b*; & ſimiliter tot eſſe in *C B*, quot fuerunt in *c b*: nam cum triangula propter angulos æquales ſint ſimilia, erit *a c*, ad *a b*:: *A C*. *A B*.

19. *Metiri diſtantias, altitudines, profunditates, & generaliter omnes magnitudines locorum diſſitorum & inacceſſibilium.* Si in vertice alicujus montis, qui eminus apparet, conſtituta ſit turris *B E*; & quis vellet obſervare illius diſtantiam & altidinem, is deberet aliquo inſtrumento (ex. gr. quadrante, id eſt, quarta circuli parte, quæ diviſa ſit in 90. grad. & inſtructa regula quadam, circa centrum mobili, quam *dioptram* appellamus) hoc inquam inſtrumento ſumere deberet duos angulos in diverſis ſtationibus, ſequentem in modum. Si es in ſtatione *A*, ita conſtitue inſtrumentum, ut latus unum exacte reſpondeat lineæ horizontali *A D*, & hunc ſitum neque attollendo neque deprimendo muta: Applica

ocu-

oculum ad *A*, id est, centrum instrumenti & dirige regulam versus verticem turris *B* tamdiu, donec illa cum tuo radio visuali coincidat: tunc hæc regula in circumferentia instrumenti notabit gradus anguli *B A D*: Est enim circumferentia instru-

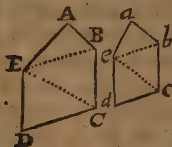



menti in gradus divisa. Postea muta stationem, & progredere in loco plano ad 10. ulnas (vel pro lubitu in quavis alia distantia) usque ad *C*, & ibi denuo cape aliam angulum *BCD*, cujus ope habebis angulum deinceps *B C A*, quia hi duo simul sumti æquales sunt duobus rectis: & sic in triangulo *A C B* cognitam habes basin, quam 10. ulnis longam sumsisti: præterea etiam cognitos habes duos angulos ad basin; & per consequens ex hisce potes elicere latus *C B* vel latus *A B* (9.18.) Accipies etiam altitudinem *B D*, vel distantiam

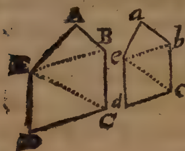
tiam *A D*, si in parvo triangulo simili ducas ex puncto *b* perpendicularem *b d*; nam *B D* vel *A B* habebunt tot ulnas, quot *b d*, vel *a d* pollices. Si acquisita altitudine *B D*, eadem methodo etiam investigetur altitudo *E D*, habebis quoque magnitudinem *E B* à vertice ad basin vel pedem turris.

*Interdum loco accessus versus turrim & observationum à vertice ad basin, nec non angulorum, qui à radiis visualibus & horizontali constituuntur; interdum inquam conducit sumere duas stationes juxta se invicem: sed ad idem recidit, & praxis revera non differt. Hoc medio, ut quivis videt, metiri possumus omnes magnitudines, quæ saltim concipi possunt, si modo extremitates duorum locorum dissitorum observare licet. Nolo hic pluribus describere praxes speciales, neque enarrare commoda ex perspicillis & opticis tubis, qui dioptræ instrumenti applicari possunt commodo observantium inæstimabili.*

*20. Delineare planum alicujus loci.* Sit urbs vel alius locus *A B C D E*, & desideretur à te illius planum delineari; Accipe omnes distantias laterum & linearum ex angulo in angulum ductarum, easque trans-

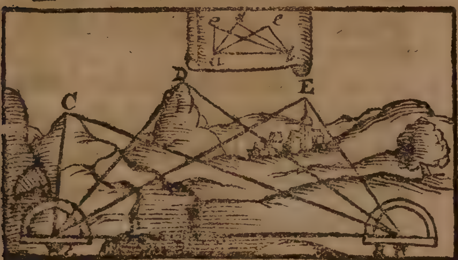


fer in chartam secundum proportionem: Exem[illegible] gratia inventa *A B* 30. ulnarum, *B C* 59. *C D* 50. *B E* 67. *A E* 49. &c. & facta in charta aliqua scala, divisa in 100. partes parvas, duc lineam *a b* 30. partium, *b e* 67. *a e* 49. hæ lineæ simul conjunctæ constituunt triangulum *A B E*, & si continuaveris efficere triangulum *b e c* simile *B E C*, &c. habebis figuram totam *a b c d e* similem loco *A B C D E*.




21. Si non datur intrare locum, vel metiri distantias angulorum *B E*, *E C*, necessum est sumere angulos loci, eosque in figuram transferre, ita ut si angulus *B A E* fuerit 66. grad. etiam angulus *b a e* sit 66. grad. & sic de reliquis.

22. *Exhibere delineationem urbis vel regionis.* Ascende in duo loca elevata *A* & *B*, è quibus conspicere possis urbem vel regionem, cujus delineationem dare vis. Habeas quadrantem, vel integrum circulum vel etiam saltim semicirculum in gradus divisum & dioptrà circa centrum mobili instructum: colloca primo instrumentum super *A*, ita ut unum latus respiciat ex *A* versus B. instrumento sic collocato ac firmato, respice turres, ædes, montes & alia loca notabi-




tabilia ut, *E D, C*, &c. atque omnes hos angulos accipe mediante dioptra, eosque memoriæ ergo nota; angulus *CAB*, exempli

o I o I

gratia, est 50. 30. angulus *DAB* 45. 8 &c. Dein procede eodem modo super *B* & nota

o I

angulum *ABC* esse 40. 10. & angulum *ABD*

o I

47.28. &c. Postea in charta assume pro lubitu lineam *a b*, & describe angulos æquales illis, quos invenisti; *c a b* æqualem *C A B*, *d a b* æqualem *D A B*, *a b c A B C* &c. & sic habebis puncta *c*, *d*, *e* &c. quæ erunt in eadem à se invicem distantia ac turres vel alia loca notabilia *C*, *D*, *E* &c. Datis jam locis principalioribus reliqua facile delineari possunt. Ad instituendam verò operationem accuratiorem, maxime conducet sumere etiam angulos tertii imò quarti loci; ut si omnia coinciderint, quis

quis certus sit, operationem bene fuisse institutam.

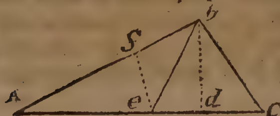
*23. Cognitis duobus lateribus trianguli, & angulo ab illis lateribus comprehenso, invenire tertium latus & reliquos duos ang.* ....

*24. Cognitis duobus lateribus & angulo uni horum laterum opposito, invenire tertium latus & reliquos angulos.* ....

*25 Cognitis omnibus angulis & uno latere invenire reliqua latera.* ......

*26. Cognitis tribus lateribus, invenire omnes angulos.* Hæc omnia exacte inveniuntur, si saltim in chartaceo constituuntur triangula similia.

*27. Metiri* aream (*id est, magnitudinem sive capacitatem interiorem*) *alicujus trianguli dati* abc. Ex vertice *b* duc perpendicularem *b d* ad basin *a c* productam, si necesse fuerit; divide *a c* in 10. (vel pro la-



ubitu in quasvis alias partes ) & vide quot partes contineantur in *b d* per 10. habebis aream trianguli, ( 3. 18 ) Vt si *b d* contineret 12. partes, quales sunt decem in *a c*, tunc necessum esset multiplicare 6. per 10. ut oriantur 60. capacitas trianguli *a b c*, id est, triangulum hoc tantum spatii comprehendit, quantum 60. continebunt parva quadrata, quorum quodvis latus esset decima pars lineæ *a c*.

*In praxi nulla datur methodus quæ facilior vel etiam exactior sit, quam hæc ipsa; nihilominus in certis casibus maxime conducit cognitio metiendi abstractè, quæ tamen non habetur nisi mediante calculo. En igitur principia, ex quibus artificium calculandi eruitur.*

## 28. *Cognitis in triangulo rectangulo* a b d *duobus lateribus, invenire tertium latus per calculum.*

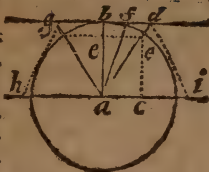
Sit crus *b d* 3 ulnarum, & crus *a d* 4 ulnarum: multiplica 3. per 3. & 4. per 4. ut exinde oriantur duo quadrata, quæ in summam collecta æqualia erunt quadrato hypotenusæ *a b*: (6 61.) & per consequens quadratum *a b*: (6. 61. & per consequens quadratum *a b* est 9 plus 16. id est 25. Ut igitur mihi constet magnitudo *a b*, saltim sumo latus vel radicem quadratam ex 25. quæ est 5. & exinde concludo *a b* esse 5. ulnarum. Si hypothe-

potenusa *a b* 5. nota est cum uno latere *a d* 4. tunc subtrahi debet quadratum 16. à quadrato 25. & restabunt 9 quorum radix est 3 magnitudo alterius cruris *b d*. Interdum accidit, ut duo quadrata crurum in unam summam collecta, non constituant numerum quadratum, vel ut quadratum unius cruris subtractum à quadrato hypotenusæ non relinquat numerum quadratum: ut si crura sunt 2. & 3. quadrata erunt 4 & 9. quæ addita faciunt 13. Sed 13. non est numerus quadratus & per consequens non habet exactam radicem; sed nihilominus dantur numeri, qui proxime accedunt, ut hic $3\frac{3}{5}$ est proxime radix ex 13 nam $3\frac{3}{5}$ in se multiplicatis, faciunt 13. minus $\frac{1}{25}$: & sic latus *a b* est $3\frac{3}{5}$ paulo majus.

*Hic non traditur methodus extrahendi radices quadratas, quia hæc est regula Arithmeticæ, de qua hic non agitur.*

29. *Computare tangentem, secantem & sinum 30. graduum.* Sit exempli gratia *b a* radius sive sinus totus, *a d* secans 30. grad. *b d* tangens, *c e* sinus; Observatu facile est, *b d* esse semissim lineæ *a d*: nam ducta *a g* alia secante 30. grad.

tria-




triangulum *g a d* erit æquilaterum: nam quivis angulorum *g* *d* & *a* erit 60. grad. cum igitur *b d* sit semissis lineæ *d g*, etiam erit semissis lineæ *a a*: ob eandem rationem *c e* erit semissis lineæ *a c*. Posito igitur in triangulo rectangulo *a e c*, hypothenusam *a c* esse 2 & crus *a c* 1. & sublato quadrato 1. â quadrato 4. restabunt 3. æqualia quadrato lateris *a e*, quod æquale est *c o* (sinui arcus *c*, 1. 60. graduum.) Sed si loco 2 & 1. pro *a c* & *c e* nos sumamus 1,000,000 & 500,000, quadratum ex *c e*, nimirum 250,000,000,000, subtractum à quadrato 1,000,000,000,000, relinquet 750,000,000,000, cujus radix quâm proxime est 866,025. pro *a e* vel *c o* sinu 60. graduum.

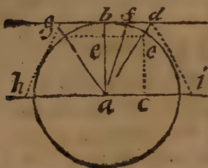
30. *Cognito* c e *sinu anguli cujuscunque, invenire* c o *sinum complementi hujus anguli.* Complementum anguli, est illud quod ad 90. grad. deest. Exempli gratia, si angulus *c a b* habuerit 30. grad. complementum illius erit 60. grad. nam 60. una cum 30. efficiunt 90. grad. Propositio hæc demonstrata est in præcedente.

*31. Co-*

31. *Cognito* c e *sinu anguli*, & *sinu complementi*, *nimirum* c o *vel* a e; *invenire tangentem* b d, & *secantem* a d. Quia triangula *a e c* & *a b d* sunt similia, tunc sequitur *a e. c e* :: *a b. b d* :: & *a e. a c* :: *a b. a d* :: & sic per regulam trium in arithmetica, posito arcum *c b* esse 30. grad. elicitur tangentem *b d* esse 577, 350. & secantem *a d*, 1, 154, 700.

32. *Cognitis sinu*, *tangente* & *secante alicujus arcus* b c; *invenire sinum*, *tangentem* & *secantem medietatis arcus*. Ducta *a f* per medium arcus *b c*, erit *d f. f b* :: *a d*, *a b* (6. 72.) & per consequens dabitur tangens *b f* 15. grad. ut & sinus & secans eorundem 15. grad. Porro etiam denuo bifariam diviso arcu *b f*, dabitur sinus, tangens & secans 7. & 30. & postea 3. grad. 45. min. & sic in infinitum.

33. *Invenire sinum* c e 45. *grad.*




Est hic sinus æqualis sinui complementi eorundem 45. gr. nimirum *e a* & per consequens invenitur etiam tangens & medietas 22. 30. & 11. 15, &c.

34. *In-*

34. *Invenire ſinum 36. grad.* Poſtquam circulo inſcripſiſti pentagonum regulare, habebis proportionem lateris hujus pentagoni ad radium. (9. 13) Sed latus hoc eſt chorda 72. grad. & ſemiſſis hujus chordæ eſt ſinus medietatis 72. gr. & min. 36. Hac ratione cognitus eſt ſinus 36 grad. & per conſequens etiam tangens & ſecans ut & ſemiſ-

0 0 0 1 0 1
ſes 18. 9. 4. 30. 2. 15. &c.

35. *Invenire ſinum, tangentem & ſecantem 12. grad. & medietatum*

0 0 0 1 1
6., 3., 1. 30., 45. &c. Poſtquam cognita eſt chorda 24. grad. quæ eſt latus polygoni regularis 15. laterum (9. 13.) etiam innoteſcet &c.

36. Omnibus his collectis habebimus ſinus, tangentes & ſecantes angulorum

1 0 1 0 1 0 1 0 1
45, 1. 30., 2. 15., 3. 45, 4. 30. & reliquos o-
1 1
mnes de 45. ad 45.

37. *Invenire ſinus omnium arcuum, qui ſunt inter duos arcus jam inventos à 45. ad 45.* Inſtituenda eſt regula proportionum. Exempli gratia,

1 1
cum ſinus 45. ſit 1308. erit ſinus 1., 29. quia

G ut

ut $45^{I}$. $1^{I}$. :: 1308. 29. ob eandem rationem ſinus $20^{I}$. erit 581. Similiter, ut habeas ſinum $3^{o}$ $30^{I}$. ſic procedes: cum ſinus $3^{o}$. ſit 5233. (9. 35.) & præterea ſinus $3^{o}$. $45^{I}$. ſit 6540. (9. 32.) apparet hæc 45. minuta, quæ ſunt inter $3^{o}$. & $3^{o}$. $45^{I}$. importare 1307. pro augmentatione ſinus: nam ſublato 5233. ſinu 3. grad. à 6540. ſinu $3^{o}$. $45^{I}$. reſtant 1307. Si igitur volueris indagare ſinum $3^{o}$. $40^{I}$. ſic dices: Si $45^{I}$. (quæ ſunt poſt 3. grad. uſque ad $3^{o}$. $45^{I}$.) important 1307. pro augmento ſinus, quantum augmenti inferent $30^{I}$. quæ ſunt inter $3^{o}$. & $3^{o}$. $30^{I}$. peracta operatione invenio 871. quæ partes ſi addantur ad 5233. reſultabunt 6104. pro ſinu 3. 30. & ſic in reliquis omnibus.

*Hac methodo conduntur tabulæ ſive ſinuum ſive tangentium & ſecantium omnium angulorum à minutis ad minuta ab* 0. *uſque ad* 90. *grad.*

*Nota*

*Nota, per hanc ultimam regulam non inveniri exacte sinus, quia sinus non eadem proportione cum arcubus sua augmenta capiunt: sed error tam exiguus est, ut non necessum sit exactiorem operationem instituere.*

38. Mediantibus his tabulis computantur triangula, quia certi sumus in quovis triangulo latera inter se esse, ut sinus angulorum oppositorum: exempli gratia in triangulo *a b c*, ex centro *e* circulo circumscripto, perpendiculares *e i*, *e h*, divident bifariam latera *a b* & *b c* (4. 6.) hinc *a b*. *b c* :: *a i*. *b h*. Sed *a i* est sinus anguli *a e i*, vel *a c b*, qui (4. 13.) illi æqualis, & similiter *b h* est sinus anguli *b e h* vel *b a c*: Ergo, &c.




39. Ex hoc principio, *cognitis duobus angulis & uno latere, vel duobus lateribus & uno angulo, invenire reliqua.* Operare per regulam proportionum; ut se habet unum latus cognitum ad sinum anguli oppositi noti; sic se habet alterum latus notum ad quartum numerum, qui erit sinus anguli alteri lateri oppositi. Vel m. si duo anguli sint cogniti cum uno latere, sic procedendum erit; ut se habet sinus anguli dati ad latus huic angulo oppositum: sic se habet sinus alterius anguli cogniti ad quar-

rum numerum, qui erit latus alteri huic angulo oppositum &c.

40. Operationes hæ nunc in compendium rēdactæ sunt: nam soliciti fuerunt, non tantum sinus & tangentes in tabulas redigere, sed etiam illorum logarithmos, è regione respondentes; Ita ut loco multiplicationis & divisionis, quam labore intolerabili in calculo sinuum & tangentium adhibere necessum habemus, in applications logarithmorum saltim additione vel subtractione utamur: ut si in triangulo *ABC*, (9.18) cujus latus *A C* est notum nimirum

| | |
|---|---|
| Sin. ang. A. 20 gr. | 9. 5340517 |
| A C. 10. ulnarum. | 1. 0000000 |
| Summa | 10. 5340517. |
| Sin. ang. B. 10. gr. | 9. 2396702. |
| Residuum quod est C B. 19,$\frac{7}{10}$ ulnarum. | 1. 2943815. |

10. ulnarum angulus *A B C* 10. grad. angulus *CAB* 20. grad quæreretur latus *B C*, dicendum esset, ut se habet sinus anguli *B* (qui in tabulis est 17364.) ad latus *A C*, quod est cognitum 10. ulnarum: sic se habet sinus anguli *A* (qui est in tabulis 34202) ad latus

tus C B. quod quæritur: ad hoc quartum C B inveniendum necessum esset multiplicare secundum terminum 10. per tertium 34202. & productum 342020 dividere per primum 17364. quod prolixum est. Sed loco horum numerorum accipimus illorum logarithmos, addendo logarithmum 20 grad. logarithmo 10. ulnarum, & à summa auferendo logarithmum 10. grad. & restabit logarithmus 1,2943855. qui in tabula reperitur inter 19. & 20. ita ut latus C B ferme sit 20. ulnarum.

*Libri, qui sinus & logarithmos tradunt, specialius hæc explicant. Nihilominus puto me tantum dixisse, quantum scire necesse est, ut quis in his omnibus proprio marte progredi possit. Addentur quædam aliæ proportiones hanc rem concernentes in continuatione hujus Geometriæ.*

41. ***Invenire lineam rectam, quæ quàm proxime æqualis sit circumferentiæ circuli.*** Sumta duodecies *b d* tangente 30. grad. hisque duodecim tangentibus ita circa circulum dispositis, ut semper binæ & binæ ponantur in directum, ceu videre est in figura art. 27. in qua *d g* sunt duæ tangentes oppositæ, ita ut quælibet respondeat 30. grad & similiter *g h*, & *d i*, &c. producetur hac ratione polygonum circumscriptum 6. laterum, cujus circum-

 feren-

ferentia major erit circumferentia circuli (4. 27.) Si verò ſinus *i e* duodecies ſumatur, conſtituetur polygonum inſcriptum 6. laterum, cujus circumferentia minor eſt circumferentia circuli. Hinc ſi radius *a b* datus ſit partium 1, 000, 000, erit tangens *b d* 577, 350. duodecies ſumta, id eſt, 6. 928, 200, major circumferentia circuli, & ſinus *e c* 500, 000 duodecies ſumtus, nimirum 6, 000, 000, minor erit circumferentia circuli.

42. Sed ſi loco tangentis & ſinus de 30. grad. quem duodecies ſumſiſti, nunc accipias tangentem & ſinum unius gradus, nimirum 17455 & 17452. conſtituentur duo polygona, alterum circumſcriptum 6, 283, 800. majus, & alterum inſcriptum 6, 282, 720. minus circulo.

43. Tandem ſit radius datus 100, 000, 000, 000. & accipiatur tangens & ſinus unius minuti 21600 es, (nam tot ſunt minuta in circulo) conſtituetur 628, 318, 512, 000 minus (nam ſinus 1. minuti eſt 29, 088, 820.) & 628, 318, 533, 600. majus. (nam tangens 1. minuti eſt 29, 088, 821.) Et ſi hi tres numeri, radii nimirum, polygoni circumſcripti & inſcripti dividantur per 100, 000, reſtabunt pro radio 1, 000, 000: & perimeter polygoni circumſcripti erit 6, 283, 185 $\frac{336}{1000}$ & perimeter inſcripti erit 6, 283,

185

185 1$\frac{12}{00}$ Ita ut hæ duæ circumferentiæ, quarum altera eſt major circumferentia circuli, & altera minor, nihilominus inter ſe non differant centum milleſima parte radii. Si quis voluerit ſumere ſinum & tangentem unius ſecundæ, immenſum in modum proximior fieret æqualitas perimetrorum polygoni circumſcripti & inſcripti.

44. In praxi aſſumitur diametrum eſſe quam proxime ad circumferentiam ut 7. ad 22. id eſt, ſi ſemidiameter vel radius diviſus ſit in 7, circumferentia proxime continebit illarum partium 44: & hoc convenit cum eo, quod explicavimus. Nam 7, 44 :: 100. $628\frac{4}{7}$.

*45. Invenire aream circuli dati.* Si radius vel ſemediameter diviſus ſit in 1000. circumferentia proxime habebit 6283. Jam multiplicata ſemiſſi hujus circumferentiæ 3141. per radium 1000 erit productum 3141000. pro tota area circuli: (4.41.) Si vero ſemidiameter fuerit alterius menſuræ exempli gratia 9. pollicum, dicendum erit 1000. 3141 :: 9. $16\frac{269}{1000}$ & ultimus hic numerus poſtea multiplicandus (qui eſſe debet ſemicircumferentia) per 9.

( qui eſt ſemidiameter ) & reſultabunt 173 $\frac{421}{1000}$ pro area circuli.

*Vt mihi videtur, magis commoda eſt hæc proportio de* 1000. *ad* 3141. *quam illa quæ communiter adhibetur* 7. *ad* 22.

46. *Metiri capacitatem parallelepipedi, vel cylindri.* Multiplica baſin per altitudinem perpendicularem.

47. *Metiri pyramidem vel conum.* Multiplica tertiam partem bàſeos per altitudinem.

48. *Metiri ſphæram.* Multiplica tertiam partem ſuperficiei per ſemidiametrum, vel etiam duas tertias maximi circuli per diametrum.

*FINIS.*



APPEN-

APPENDICIS LOCO
adjicere placuit
*Caput nonum Part. IV.*
ex

# LOGICA SIVE ARTE COGITANDI,

*ex Gallico sermone in Latinum translata;*

quia illud cum methodo auctoris nostri maxime convenit.



## *De quibusdam defectibus in Geometrarum methodo passim obviis.*

QVod in Geometrarum methodo obvium est, jam vidimus ad quinque regulas â nobis reductum, in quibus observandis nimii esse non possumus: & fatendum quidem est, rem esse prorsus admirabilem, tot occulta & eruta esse, & firmissimis rationibus demonstrata ope regularum adeo paucarum: ita ut inter omnes Philosophos soli Geometræ sint, qui suis è scholis & libris disputationes litesque exterminarunt.

Nihilominus si, sepositis præjudiciis, dicenda sententia sit, uti ea laude spoliari non debent, quod viam præ cæteris omnibus maxime certam instituerunt ad veritatem assequendam, ita negari non potest, quin in aliquos defectus lapsi sunt, qui à fine quidem proposito eos non averterunt, sed tamen per devia & incommodas viarum asperitates circumduxerunt. Et hoc illud est quod tractis ipsius Euclidis exemplis conabor ostendere.

### DEFECTUS PRIMUS.

*De certitudine, quàm de Evidentia; de intellectu convincendo, quam illuminando magis laborare.*

Lau-

Laudi Geometris dandum, quod nihil proferant nisi certum & demonstratum. Sed videntur non satis animadvertisse ad perfectam alicujus veritatis scientiam, non sufficere illam habere pro vera & demonstrata, si insuper rationibus petitis ab ipsis rei cognitæ visceribus penitissimè non pervideamus, cur illa vera sit. Nam quamdiu citra hoc genus certitudinis consistimus, animis nostris plenè factum non erit satis, altiorem quippe penitioremque rerum cognitionem concupiscimus, quòd indicio est, nos veram perfectamque cognitionem nobis nondum comparavisse. Dici potest, quod hic Defectus cæterorum, quos infra perstringemus, causa sit & origo; ac proinde non est cur illi denudando diutius hoc loco immoremur, cum id in sequentibus fiet.

DEFECTUS SECUNDUS.

*Ea probare, quæ probatione non egent.*

Fatentur Geometræ non esse probanda, quæ ex se clara sunt: Ea tamen sæpissime probant. Quia cum ad assensum extorquendum magis, quàm ad intellectum illuminandum sese, uti diximus, applicuerint, hoc abundantius crediderunt se fuisse præstituros, si res etiam evidentes probatiunculis stabilirent, quám si easdem simpliciter proponerent, agnoscendamque menti evidentiam committerent.

Hoc illud est, quod Euclidem impulit ad pro-

probandum duo trianguli latera simul sumpta esse tertio majora. Quamvis hoc ex ipsa lineæ rectæ notione evidens sit, quæ est earum brevissima, quæ inter duo puncta duci possunt; & quæ est naturalis mensura intervalli, quo punctum à puncto distat: quod tamen non foret, si omnium linearum brevissima non esset, quæ à puncto ad punctum ducuntur.

Hoc etiam illum compulit, ut Problema demonstrandum faceret, quod poterat inter postulata reposuisse, sc. *ducere lineam æqualem lineæ datæ.* Quamvis hoc facillimum sit, imò facilius quam circulum dato radio describere.

Procul dubio hic defectus ex eo ortum duxit, quod Euclides non considerarit omnem certitudinem omnemque evidentiam cognitionum nostrarum in scientiis naturalibus huic principio inniti: *Quicquid in clara & distincta Idea alicujus continetur, potest de illo verè affirmari.* Ex quo sequitur, si per simplicem tantùm Ideæ considerationem, nullis aliis Ideis ascitis, cognosci potest attributum in illa Idea contineri, propositionem debere pro evidenti & clara haberi, quemadmodum superius dictum est.

Novi equidem esse quædam prædicata, quæ minori negotio cognoscuntur Ideis inesse, quam alia; sed si inesse cognosci possunt mediocri attentione, ita ut nullus, cui

sana

ſana mens, de eorum connexione poſſit ſeriò dubitare, ſufficere arbitror, ut Propoſitiones ejusmodi, ex Idearum ſimplici conſideratione enatæ, principiorum loco ſint, quæ demonſtratione non indigeant; Sed, ut plurimum, brevi aliqua explicatione. Ac proinde contendo neminem, qui vel tantillum ad ideam lineæ rectæ attenderit, non eſſe perſpecturum, non tantùm quod à duobus punctis ejus notio dependeat, (quod Euclidi poſtulatum eſt) ſed etiam, idque facilè & clariſſimè, quòd, (ſi linea recta rectam ſecet, ſintque in ſecante duo puncta, quorum utrumlibet æqualiter diſtat à duobus punctis in linea ſecta) quòd, inquam, aliud in ſecante dari punctum non poſſit, quod non æqualiter diſtet à duobus punctis in linea ſecta aſſignatis. Ex his facilè cognoſci poterit, quando linea ad lineam erit perpendicularis, ſine angulorum triangulorumque auxilio, quæ tum demum tractari debent, cum multa fuerint demonſtrata, quæ non niſi ope linearum perpendicularium demonſtrari poſſunt.

Obſervatione etiam dignum eſt, maximos Geometras pro principiis ponere Propoſitiones hac noſtra multo obſcuriores. Archimedes etenim pulcherrimas ſuas demonſtrationes huic axiomati inædificavit. *Si duæ lineæ in eodem plano eaſdem extremitates habent; & ſi curvæ vel cavæ ſint verſus*

*sus eandem partem, contenta minor erit continente.*

Fateor equidem, probare id, quod probatione non indiget, vitium videri quam minimum, imò in se nullum esse: Est tamen, si ea consideremus, quæ inde sequuntur. Hinc enim illa naturalis ordinis inversio oritur, de quo infra agemus, cum hæc prurigo ea probandi, quæ pro claris ex se & evidentibus supponi debent, ipsos Geometras adegerit, ad illa tractanda, (ut scil. iis probandis inservire possent, quæ probari non debebant) quæ postea tantum secundum naturalem rerum ordinem essent resumenda.

DEFECTUS TERTIUS.

*Demonstrare per impossibile.*

Hoc genus demonstrationum, quo quid demonstratur, non per propria rei principia, sed per aliquod (si res aliter sese haberet,) inde subsequuturum absurdum, apud Euclidem frequentissimum est. Cum tamen manifestum sit, tales demonstrationes assensum quidem nostrum extorquere, non autem intellectum clarigare: qui tamen scientiarum finis præcipuus esse debet. Animus enim noster tranquillus quietusque non fit, nisi sciat & rem esse, & rationem cur ita sit, quod non habetur à Demonstratione deducente ad impossibile.

Non tamen omnino rejiciendæ sunt tales demonstrationes; nam adhiberi possunt ad

pro-

probandas conclusiones negativas, quæ propriè corollaria tantum sunt aliarum propositionum, vel ex se evidentium, vel aliàs demonstratarum. Et tunc etiam hoc genus demonstrationis ad impossibile adigens, explicationis potius loco habendum est, quàm novæ demonstrationis.

Tandem dici potest hasce demonstrationes tunc tantum admittendas, cum aliæ excogitari non possunt. Culpa tamen non caret, qui illis utitur ad conclusiones positivas probandas. Jam verò multa sunt in Euclide hoc modo demonstrata, quæ tamen facili negotio aliter possent demonstrari.

DEFECTUS QVARTUS.

*Demonstrare per aliena & remota.*

Hoc vitium apud Geometras Communissimum est: parum illi solliciti sunt, unde probationes accersant, modo demonstrativas nanciscantur; cum tamen demonstratio imperfectissima sit, quæ instituitur per aliena & remota, à quibus res demonstratæ secundum naturæ ordinem non dependent.

Dictis lucem ab exemplis fœnerabimur. Euclides l. 1. pro. 5. probat triangulum Isosceles habere duos angulos ad basim æquales, ad hoc, latera æqualiter producit, nova hinc triangula fabricatur, quæ demum cum aliis jam factis comparat.

Nunquid autem incredibile non est, rem adeò facilem, ac est hæc angulorum æqualitas,

litas, tantis ambagibus indigere ad sui probationem. Nunquid quidpiam magis ridiculum, quàm hanc angulorum æqualitatem à peregrinis illis angulis deducere; cùm naturalem ordinem servanti, & facilimi & maxime naturales modi quam plurimi se offerant illam æqualitatem probantes.

Propositio 47. l. 1. quæ probat quadratum basis angulo recto subtensæ, æquale esse quadratis reliquorum laterum, inter Euclideas propositiones decantatissima est. Evidens tamen est adductam demonstrationem naturalem non esse, cum æqualitas quadratorum à triangulorum æqualitate non dependeat, quod tamen est hujus demonstrationis medium; sed à linearum proportione, quæ facile potest demonstrari ope solius perpendiculi, ab angulo recto ad basin demissi.

Euclides totus scatet hujusmodi demonstrationibus à remotis & alienis.

DEFECTUS QUINTUS.

*Non observare naturalem rerum ordinem.*

Turpissimum Geometrarum vitium hoc est; nullum enim illi ordinem sibi observandam rati sunt, modo priores propositiones ita disponant, quæ posterioribus possint demonstrandis inservire; ac proinde veræ methodi regulas negligentes, (qua docemur à simplicibus, & maxime generalibus semper ordiri, ut demum ad composita & particu-

cularia descendamus, ) omnia confundunt; unà lineas & superficies, triangula & quadrata commiscent; figurarum ope linearum proprietates demonstrant, aliaque multa invertunt, unde scientiæ pulcherrimæ labes fœdissima aspergitur.

In Euclidis Elementis creberrimum est hoc vitium. Cum quatuor prioribus libris de extenso actum fuerit, quinto agitur de proportione omnimodarum generaliter magnitudinum: sexto extensum resumitur: septimo, octavo, & nonō de numeris differitur, ut de extenso demum agatur in decimo. En præposterum omnium ordinem! sed etiam in particularibus infinities peccat, primū librum orditur à constructione trianguli æquilateris, & demum, post duas supra viginti propositiones, generalem methodum præscribit trianguli conficiendi ex datis tribus lineis rectis, modo duæ sint tertia majores, quod ex constructione trianguli æquilateris super linea data notum erat.

Nihil de lineis perpendicularibus demonstrat, vel de parallelis, nisi per triangula. Superficierum dimensiones cum dimensionibus linearum confundit.

Libro primo pro. 16. demonstrat, producto latere trianguli, angulum exteriorem majorem altero interiorum oppositorum, &, inferius post 16. propositiones, probat hunc angulum esse æqualem duobus rectis.

Ex-

Exſcribendus nobis eſſet Euclides, ſi omnia hujus vitii exempla vellemus adducere.

## DEFECTUS SEXTUS.

*Non adhibere diviſiones & partitiones.*

Et hujus vitii accuſanda Geometrarum methodus. Non quod Generum de quibus agunt omnes ſpecies non notent, ſed quia id faciunt terminos ſimpliciter definiendo, definitiones tum ſubjiciendo, cum tamen declarare deberent & genus tot ſpecies habere, & plures non poſſe habere, quia Generalis Idea Generis plures recipere differentias non poteſt; quod multum lucis afferret ad generis ſpecieique naturas penitius cognoſcendas.

Exempli libro primo Euclidis habentur definitiones omnium ſpecierum trianguli; ſed quis non videt multum claritatis affulſurum, ſi ita illæ proponerentur.

Triangulum dividi poteſt, vel ſecundum latera, vel ſecundum angulos.

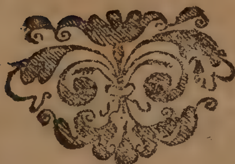
Latera ſunt vel Omnia æqualia, & vocatur *Æquilaterum*. Vel Duo tantum æqualia, & vocatur *Iſoſceles*. Vel Omnia inæqualia, & vocatur *Scalenum*.

Anguli ſunt vel Omnes acuti, & vocatur *Oxigonum*, Vel Duo tantum acuti, & tunc tertius eſt. Vel Rectus, & dicitur *Rectangulus*. Vel Obtuſus, & dicitur *Ambligonium*.

Præ-

Præſtat autem, tum demum hanc trianguli diviſionem tradere, cum prius explicatæ & demonſtratæ fuerint generales trianguli proprietates ; unde poterit cognoſci duos ſaltem angulos in triangulo debere eſſe acutos, quia tres junctim duobus rectis æquivalent.

Hoc vitium coincidit cum illo inverſi ordinis: non enim debemus de ſpeciebus agere vel eas etiam definire niſi poſtquam probe ipſum genus cognovimus, præſertim ſi multa de genere dici poſſunt & explicari, ſine ſpecierum mentione.



INDEX.

# INDEX
## Vocum in hac Geometria explicatarum.

*Primus numerus notat librum, & reliqui articulum.*

### A.


*Æquilaterum* 2.7
*Æquimultiplex* 6.15
*Alternando, invertendo &c.* 6.9.8
*Amblygonium vel obtusangulum* 2.6
*Anguli alterni, interni* 1.30
*Angulus rectus, obtusus, acutus* 1.17
*Anguli externi trianguli* 2.10
*Anguli oppositi, deinceps* 1.17
*Angulus rectilineus, curvilineus, mixtus.* 1.6
*Angulus subtensus vel oppositus* 2.17
*Arcus* 1.11
*Area, capacitas vel magnitudo figuræ* 9.25

C

*Circinus s. instrumentum proportionum* 9.14
*Circulus* 1.10
*Circumferentia* ibid.
*Commensurabilis* 7.4
*Commensurabilis potentia* 7.33
*Complementum in parallelogrammo.* 3.12
*Complementum anguli* 9.30
*Congruæ figuræ* 2.12
*Conversa propositio* 1.33
*Convertendo, componendo &c.* 6. 11 12 &c.
*Corpus s. solidum* 1.4.


*Cru-*

*Crura, latera circa angulum rectum trianguli* 6.61
*Cubicus numerus* 7.39

D.

*Diagonalis, diameter, linea ducta ex an. in angulum in parallelogrammis* 3 7
*Diameter* 1.12. & 3.7

E.

*Ex aquo, proportio* 6.13.14

G.

*Geometrica progressio* 8.8
*Gnomon* 3 12
*Gradus progressionis* 8.10
*Gradus minuta, secunda* 1. 24

H.

*Harmonica progressio* 8.32.
*Homologa latera* 6, 31
*Hypotenusa, maximum latus trianguli rectanguli* 6. 61

I.

*Incommensurabilis* 7.5
*Invertendo, alternando &c.* 6. 8, 9, &c.
*Isoperimetra* 4.32 *in fine*
*Isosceles, triangulum habens duo crura aequalia* 2.7

L.

*Latera sive radices numerorum* 7.10
*Logarithmi* 8. 26

M.

*Magnitudo* 6. 1
*Metiri* 7.1

*Minu*

*Minuta, gradus* 1. 24
*Multiplicare lineam per aliam lineam, vel per superficiem* 6, 17. 18.

N.

*Numerus planus* 7. 9. *solidus* 7. 37
*Numeri plani similes* 7. 14
*Numerus quadratus* 7. 12. *cubicus* 7. 39

O.

*Obliqua, linea* 1. 17
*Oxygonium vel acutangulum* 2. 5

P.

*Parallelæ* 1. 26
*Parallelogrammum* 3. 2
*Parallelogramma circa diametrum* 3. 12
*Pars* 7. 2. *Partes* 7. 3
*Perpendicularis* 1. 15
*Planum vel superficies plana* 1. 5
*Posse: linea potest bis aliam* 7. 32
*Potentia prima* 7. 32. *secunda* 7. 35
*Problema, Theorema* 9. 1
*Progressio Arithmetica* 8. 2. *Geometrica* 8. 8
*Harmonica* 8. 32.
*Progressio quadratorum, cuborum &c.* 8. 34
*Proportio* 6. 6

Q.

*Quadrilaterum, figura quatuor later.* 3. 1
*Quantitas* 1. 2
*Quadrati quadratum, surfolidus &c.* 8. 10

R.

*Radix vel latus numerorum.* 7. 10

*Ra-*

*Radius* vel *semidiameter* 1. 13. vel *sinus totus* 4. 7.
*Ratio* 6. 2
*Ratio composita* 6. 26
*Ratio duplicata* 6. 29. 30. *Triplicata* 6. 36
*Ratio aequalis* vel *proportio* 6. 4. 6
*Ratio major* 6. 5
*Reciproca* 4. 9
*Rectangulum simpliciter pro parallelogrammo rectangulo* 3. 3
*Rhombus* 3. 4
*Rhomboides* 3. 5

S.

*Scalenum, triangulum tribus lateribus inaequalibus* 2. 7. *Conus* vel *Cylindrus* vel *parallelepipedum* 5. 12
*Secans, tangens, sinus* 4. 9
*Similia triangula* 6. 44. *Rectangula* 6. 30
*Sinus, tangens, secans* 4. 9
*Sinus complementi* 9. 28
*Solida* 6. 54. *Figurae* 6. 48. 47
*Solidum corpus* 1. 4. *Angulus solidus* 5. 4
*Superficies plana* vel *planum* 1. 4
*Sursolidus, quadratus, cubus &c.* 8. 10

T.

*Tangens, sinus, secans* 4. 9
*Termini progressionis* 8. 1
*Theoremata, Problemata* 9. 1
*Trapezium, quadrilaterum irregulare* 3. 2

❧(o)☙